



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Szalai Albin

1D hőterjedés numerikus megoldása

Elektronikus Eszközök Tanszéke, 2011.

Tartalomjegyzék

1. Elméleti háttér	2
1.1. A probléma formális leírása	2
1.2. Peremfeltételek	4
1.2.1. A Dirichlet típusú peremfeltételek	4
1.2.2. A Neumann típusú peremfeltételek	5
1.2.3. A vegyes peremfeltételek	5
1.2.4. A szükséges peremfeltételek száma	5
1.3. Kezdeti feltételek	6
1.3.1. Általános kezdeti feltétel	6
1.3.2. Állandó hőmérsékletű kezdeti feltétel	6
1.3.3. Állandósult állapotú kezdeti feltétel	6
1.4. Generáló és elnyelő tagok	7
1.4.1. Általános generáló és elnyelő tagok	7
1.4.2. Nincs generáció vagy elnyelés	7
1.4.3. Nem egységes hővesztés vagy hőnyereség	7
1.5. A megoldási stratégia	7
1.5.1. Egydimenziós hőegyenlet	7
2. A megvalósítás	8
2.1. Megjegyzések a kódhoz	8

1. fejezet

Elméleti háttér

1.1. A probléma formális leírása

Egy rendszer hőtranszferének a vizsgálatában, mint minden mérnöki rendszer vizsgálatában, első lépésben fel kell írunk a megfelelő mérleg egyenleteket. Egy teljesen általános ilyen mérleg egyenlet valahogy így néz ki:

$$\text{össz} = \text{be} - \text{ki} + \text{generált} - \text{elnyelt} \quad (1.1)$$

Hőtranszfer esetén az energia mérlegegyenletét kell meghatározunk. Mielőtt megfogalmaznánk az energia mérlegünket, néhány kikötést kell tennünk:

- Nincs momentum transzfer. Nincs hőtranszferünk konvektív úton.
- Nincs tömegáramlás.
- Nincs energia bevitel/kivétel mechanikai munka által.
- A hőkapacitás C_p és a termikus vezetőképesség k , nem függvénye a hőmérsékletnek.
- Az anyagunk izotróp. Az anyagi paraméterek C_p , k és ρ azonosak az anyag valamennyi pontjában. A termikus vezetőképesség minden irányban azonos.

A rendszerünk egy végtelen kocka. A térfogata $V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Az energiaösszeg ebben a rendszerben:

$$\text{össz} = \frac{\partial V \rho C_p T}{\partial t} = \Delta x \Delta y \Delta z \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right]$$

A sűrűséget, hőkapacitást és a térfogatot ki tudjuk emelni a derivált számlálójából, mert kikötöttük, hogy ezek állandók. Az energiamérlegünk bejövő része:

$$\text{be}_x = (A_x q_x)_x = (\Delta y \Delta z q_x)_x \left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right]$$

$$\text{be}_y = (A_y q_y)_y = (\Delta x \Delta z q_y)_y \left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right]$$

$$be_z = (A_z q_z)_z = (\Delta x \Delta y q_z)_z \left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right]$$

Az energiamérleg kimenő tagjai:

$$ki_x = (A_x q_x)_{x+\Delta x} = (\Delta y \Delta z q_x)_{x+\Delta x} \left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right]$$

$$ki_y = (A_y q_y)_{y+\Delta y} = (\Delta x \Delta z q_y)_{y+\Delta y} \left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right]$$

$$ki_z = (A_z q_z)_{z+\Delta z} = (\Delta x \Delta y q_z)_{z+\Delta z} \left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right]$$

Az energiamérleg generáló tagját meghagyjuk egy általános függvénynek aminek a dimenziója energia/idő/térfogat. A függvénynek pozitív az előjele ha generálást, negatív ha elnyelést fejez ki.

$$\text{generált} = V f(t, x, y, z) = \Delta x \Delta y \Delta z f(t, x, y, z) \left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right]$$

Ezekkel a tagokkal végül egy olyan energiamérleghez jutottunk ami a következő módon néz ki:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \Delta z \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= (\Delta y \Delta z q_x)_x + (\Delta x \Delta z q_y)_y + (\Delta x \Delta y q_z)_z - \\ &- (\Delta y \Delta z q_x)_{x+\Delta x} - (\Delta x \Delta z q_y)_{y+\Delta y} - (\Delta x \Delta y q_z)_{z+\Delta z} + \Delta x \Delta y \Delta z f(t, x, y, z) \end{aligned}$$

Leosztva a térfogattal rendezés után:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(q_x)_x - (q_x)_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(q_y)_y - (q_y)_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{(q_z)_z - (q_z)_{z+\Delta z}}{\Delta z} + f(t, x, y, z)$$

Vegyük a Δ elemek 0-hoz tartó határértékét (infinitezimálisan kis elemek). A deriválás definícióját ismerhetjük fel benne, így az energiamérleg:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + f(t, x, y, z) \quad (1.2)$$

ahol az energiamérleg dimenziója $\left[\frac{\text{energia}}{\text{térfogat} \cdot \text{idő}} \right]$, q az energia fluxus dimenziója $\left[\frac{\text{energia}}{\text{terület} \cdot \text{idő}} \right]$ és $f(t, x, y, z)$ egy általános függvény ami minden generációval és elnyeléssel kapcsolatos tagot tartalmaz.

Most be kell illesztenünk Fourier törvényét a hővezetéshez, ami a z irányban:

$$q_z = -\alpha \frac{d(\rho C_p T)}{dz} \quad (1.3)$$

ezt beillesztve megkapjuk a következő összefüggést:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \rho C_p \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + f(t, x, y, z) \quad (1.4)$$

A termikus vezetőképesség definíciója:

$$k = \alpha \rho C_p \quad (1.5)$$

így a három dimenziós hővezetés egyenlete egyszerűsítve:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{f(t, x, y, z)}{\rho C_p} \quad (1.6)$$

ami kettő dimenzióban:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{f(t, x, y, z)}{\rho C_p} \quad (1.7)$$

egy dimenzióban:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{f(t, x, y, z)}{\rho C_p} \quad (1.8)$$

ahol α a termikus diffúzitás

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (1.9)$$

dimenziója $\left[\frac{\text{hossz}^2}{\text{idő}} \right]$, mint a diffúzitás esetén. Azért használjuk az α -t és nem C_p , k és ρ paramétert, mert így a problémánkat egy paraméteresre redukáltuk. Természetesen a probléma megoldásához először ki kell keresnünk az irodalomból ezeket az értékeket és kell határoznunk α értékét.

A fent levezetett egyenletek rendre a három-, kettő- és egydimenziós hőegyenletek. Ezek az időre nézve elsőrendű parciális differenciál egyenletek, a térbeli koordinátákra nézve másodfokú parciális differenciál egyenletek.

A hőegyenlet fizikai jelentése azonos az energiamérleg fizikai jelentésével. Ahogy leírtuk, ez egy tranziens energiamérleg.

Az egydimenziós esetet több valós rendszer modellezésére is használhatjuk. Egy ilyen példa, ha két különböző hőmérsékletű ideális hőtartályt egy hengeres szilárd vezetővel kötünk össze.

1.2. Peremfeltételek

Az előző részben bemutatott hőegyenletek a térbeli koordinátákra nézve másodrendű parciális differenciál egyenletek. Be kell állítanunk a peremfeltételeinket, hogy meghatározzuk a rendszerünk milyen módon lép kapcsolatba a környezetével.

Három fő peremfeltétel típust különböztethetünk meg: a Dirichlet, a Neumann és a vegyes peremfeltételeket.

1.2.1. A Dirichlet típusú peremfeltételek

A Dirichlet peremfeltétel azt mondja ki, hogy a hőmérséklet az adott peremponton meghatározott értéket vesz fel. Egydimenziós esetben ez formálisan:

$$T(x = 0, t) = T_{bc1}(t) \quad (1.10)$$

eszerint az egydimenziós rendszer baloldali peremén a hőmérséklet az idő valamilyen függvénye. Amennyiben a hőmérsékletünk állandó:

$$T(x = 0, t) = T_{bc1} \quad (1.11)$$

Ebben az esetben egy olyan fizikai helyzet áll fent, hogy a rendszerünket egy végtelen hőtartályhoz kapcsoljuk, ami garantálja az állandó hőmérsékletet a peremponton.

Egydimenziós esetben két peremfeltételt kell tennünk, egyet a baloldali peremre, egyet a jobboldali peremre. Ha a rendszerünk hossza L az x irányban, akkor a második Dirichlet peremfeltétel formálisan:

$$T(x = L, t) = T_{bc2}(t) \quad (1.12)$$

1.2.2. A Neumann típusú peremfeltételek

A Neumann peremfeltétel azt mondja ki, hogy a hőfluxus adott a peremen. Egydimenziós esetben ez formálisan:

$$\frac{dT}{dx}(x = 0, t) = \left. \frac{dT(t)}{dx} \right|_{bc1} \quad (1.13)$$

Ez azt mondja ki, hogy az egydimenziós rendszerünk baloldali peremén a hőfluxus az idő függvénye. Ha a hőfluxus állandó:

$$\frac{dT}{dx}(x = 0, t) = \left. \frac{dT}{dx} \right|_{bc1} \quad (1.14)$$

Ebben az esetben egy olyan fizikai helyzet áll fent, ahol a rendszerünket egy végtelen hőforráshoz kapcsoljuk, ami állandó hőfluxust biztosít a rendszerünk számára függetlenül a hőmérséklettől.

Egydimenziós esetben két peremfeltételt kell tennünk. Ha az egydimenziós rendszerünk hossza L az x irányban, a második Neumann peremfeltétel formálisan:

$$\frac{dT}{dx}(x = L, t) = \left. \frac{dT(t)}{dx} \right|_{bc2} \quad (1.15)$$

1.2.3. A vegyes peremfeltételek

A vegyes peremfeltételek, mint ahogy azt a nevük is sugallja, a Dirichlet és a Neumann peremfeltételek keveréke. Egydimenziós esetben formálisan:

$$\frac{dT}{dx}(x = 0, t) + T(x = 0, t) = T_{bc1}(t) + \left. \frac{dT(t)}{dx} \right|_{bc1} = f(t) \quad (1.16)$$

A legtöbb valós fizikai rendszer leírásához ezt a peremfeltételt kell használnunk.

1.2.4. A szükséges peremfeltételek száma

Ahogy az az előbbieken bemutatásra került, egy egydimenziós rendszernek legalább két peremfeltételt kell adni. Természetesen ezeknek nem kell, hogy megegyezzenek, lehet olyan a fizikai rendszer, hogy az egyik végén Dirichlet, a másik végén vegyes peremfeltételeket kell

adnunk. Ilyen például az az eset, amikor egy körkeresztmetszetű homogén rúd egyik vége egy végtelen hőtartályhoz (Dirichlet), másik vége pedig a légkörbe van helyezve, ahol a hőt le tudja adni a környezetének. A hővesztést egy hőátviteli tényezővel lehet modellezni, így a második peremfeltételünk a hőtranszfer következő állítását adja:

$$qA = hA (T_{\text{környezet}} - T(x, t)) \quad (1.17)$$

Fick törvénye alapján:

$$q_x = -\alpha \frac{d(\rho C_p T)}{dx} \quad (1.18)$$

A hővesztés a peremnél a következő formában írható

$$-\alpha \frac{d(\rho C_p T)}{dx} A = hA (T_{\text{környezet}} - T(x, t)) \quad (1.19)$$

így

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{h (T_{\text{környezet}} - T(x, t))}{k} \quad (1.20)$$

vagyis a peremfeltételünk a következőnek adódik:

$$\frac{dT}{dx}(x = L, t) = -\frac{h (T_{\text{környezet}} - T(x = L, t))}{k} \quad (1.21)$$

Ami egy vegyes peremfeltétel, mert a rúdnek mind a hőmérsékletét, mind a hőfluxusát tartalmazza. Megjegyzés: a vegyes peremfeltételekre sokszor általánosított Neumann peremfeltételként is szoktak hivatkozni, a MATLAB pde-tool-ja is így hivatkozik rá.

1.3. Kezdeti feltételek

1.3.1. Általános kezdeti feltétel

A hőegyenlet első fokú az időben. Tudnunk kell a rendszer minden pontjában a hőmérséklet nulla időpontbeli értékét. Általánosan a kezdeti feltétel egydimenziós esetben:

$$T(x, t = 0) = T_{ic}(x) \quad (1.22)$$

1.3.2. Állandó hőmérsékletű kezdeti feltétel

Ha a hőmérséklet állandó, akkor a kezdeti feltétel:

$$T(x, t = 0) = T_{ic} \quad (1.23)$$

1.3.3. Állandósult állapotú kezdeti feltétel

Ha a hőmérséklet profil kezdeti értéke állandósult (lineáris) a két peremfeltétel által megadott hőmérséklet T_{bc1} és T_{bc2} között, akkor a következő formulával lineárisan interpolálhatjuk az értékeket közöttük:

$$T(x, t = 0) = T_{bc1} + \frac{x}{L} (T_{bc2} - T_{bc1}) \quad (1.24)$$

1.4. Generáló és elnyelő tagok

1.4.1. Általános generáló és elnyelő tagok

A hőegyenletet a (1.6-1.7-1.8) felírt alakok egy általános generáló elnyelő tagot tartalmaznak, ami időnek és helynek is függvénye lehet. Egydimenzióban a hőegyenletben $f(t, x)$ tagként jelenik meg.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{f(t, x)}{\rho C_p} \quad (1.25)$$

1.4.2. Nincs generáció vagy elnyelés

Ha nincs hőgeneráló vagy elnyelő tagunk:

$$f(t, x) = 0 \quad (1.26)$$

1.4.3. Nem egységes hővesztés vagy hőnyereség

Ha van hővesztésünk (vagy fejlődésünk) a rúd mentén, mert például nincs elszigetelve a környezettől, az energia veszteség (vagy nyereség) $\left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right]$ formálisan:

$$qA = hA (T_{\text{környezet}} - T(x, t)) \quad (1.27)$$

Az anyagunk egységnyi térfogatára eső veszteségünk (vagy nyereségünk) $\left[\frac{\text{energia}}{\text{idő} \cdot \text{térfogat}} \right]$ ezek alapján:

$$f(t, x) = \frac{qA}{V} = \frac{hA (T_{\text{környezet}} - T(x, t))}{V} \quad (1.28)$$

(1.27)-t behelyettesítve (1.8)-be

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{hA (T_{\text{környezet}} - T(x, t))}{\rho C_p V} \quad (1.29)$$

1.5. A megoldási stratégia

1.5.1. Egydimenziós hőegyenlet

A Crank-Nicolson algoritmust használjuk az egydimenziós parabolikus parciális differenciál egyenlet megoldásához. A Crank-Nicolson algoritmus egy véges differencia sémán alapuló algoritmus, amivel egydimenziós PDE-ket lehet megoldani. Ebben a megoldásban az x irányban n részre osztjuk a struktúránkat. Ezek alapján fogjuk közelíteni a valódi folytonos hőmérsékleti profilt egy n pontban diszkrétizálttal. Ezt a profilt újra és újra megoldva tudjuk meghatározni a profilokat az idő függvényében. Ha meg akarjuk határozni a profilt egy t_f időpillanatban t_0 kiindulástól számítva, az időt is felosztjuk m pontra. Ezek után n térbeli és m időbeli intervallumunk. Ha növeljük m és n értékét akkor pontosabb eredményt kapunk, természetesen növekvő számítási idő mellett.

2. fejezet

A megvalósítás

2.1. Megjegyzések a kódhoz

A programot a MATLAB scriptnyelven valósítottam meg. Mivel a rendelkezésemre álló gépen nem volt elérhető MATLAB telepítés, így ennek nyílt forráskódú implementációjával dolgoztam, a GNU Octave-al. Ennek az alap utasításkészlete lényegében ekvivalens a MATLAB alap utasításaival, a jelentősebb eltérések a Toolboxok számában és kidolgozottságában van, de ezeket nem használtam a megvalósításhoz. Az általam elkészített programnak gond nélkül kellene futnia a mai MATLAB verziókon.

A program egyes részeit a kódok közé írt kommentekben magyarázom.