



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Lineáris elosztott RC hálózatok analízise

Doktori (Ph.D.) értekezés

Szerző: Szalai Albin
okleveles villamosmérnök

Témavezető: Dr. Székely Vladimír
professzor emeritusz
az MTA rendes tagja

Elektronikus Eszközök Tanszéke
Budapest, 2014.

Nyilatkozat önálló munkáról, hivatkozások átvételéről

Alulírott Szalai Albin kijelentem, hogy ezt a doktori értekezést magam készítettem és abban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, amelyet szó szerint, vagy azonos tartalomban, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2014. február 26.

Nyilatkozat nyilvánosságra hozatalról

Alulírott Szalai Albin hozzájárulok a doktori értekezésem Interneten történő nyilvánosságra hozatalához az alábbi formában:

- korlátozás nélkül
- elérhetőség csak magyarországi címről
- elérhetőség a fokozat odaítélését követően 2 év múlva, korlátozás nélkül
- elérhetőség a fokozat odaítélését követően 2 év múlva, csak magyarországi címről

Budapest, 2014. február 26.

Tartalomjegyzék

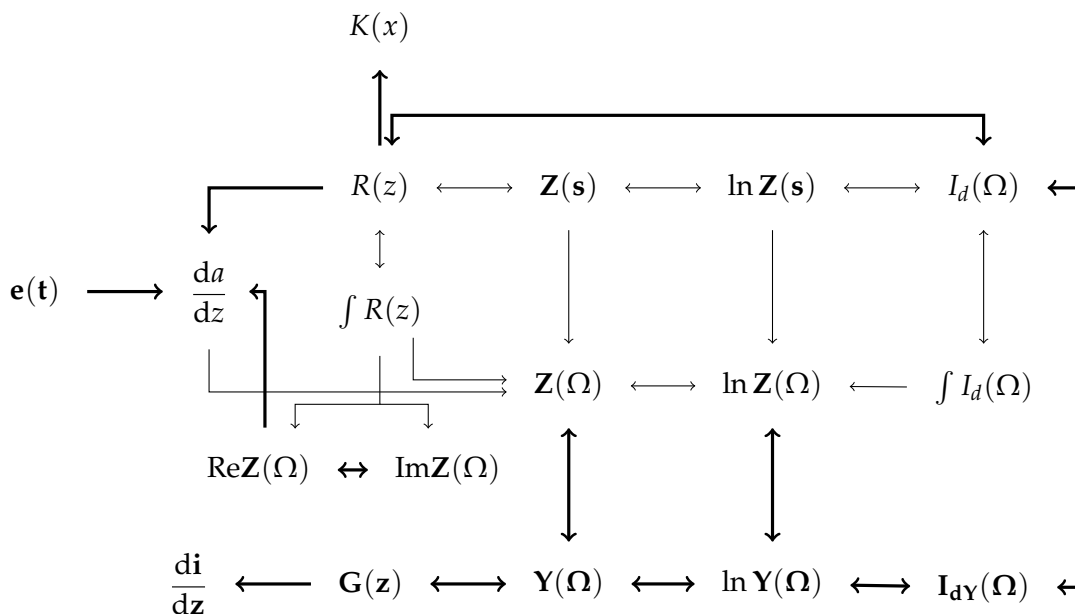
1. Bevezetés	3
1.1. Célkitűzések	4
2. Irodalmi áttekintés	6
2.1. Az elektronikus és termikus rendszerek közötti analógia	6
2.1.1. Villamos rendszerek tranziense	6
2.1.2. Termikus rendszerek tranziense	7
2.2. A klasszikus fogalmak kiterjesztése elosztott rendszerekre	8
2.2.1. Az időálló spektrum	9
2.2.2. A dipólus intenzitás függvény	12
2.2.3. A dipólus intenzitás függvény kapcsolata az impedancia függvénnyel	14
2.3. Egyes alapösszefüggések átfogalmazása konvolúció segítségével	16
2.3.1. Időtartomány \rightarrow frekvenciatartomány irányú transzformáció	17
2.3.2. Hálózatjellemző függvények valós és képzetes része közötti össze- függés	17
2.3.3. Frekvenciatartomány \rightarrow időtartomány irányú transzformáció	18
3. Az elosztott RC hálózatok elmélete	20
3.1. Kapcsolat az időálló spektrum és a dipólus intenzitás függvény között	21
3.1.1. Példák az időálló spektrum \leftrightarrow dipólus intenzitás függvény transzformációkra	23
3.2. A Bode integrál átfogalmazása	25
3.2.1. A képzetes rész számítása	27
3.2.2. A valós rész számítása	29
4. Admittancia alapú leírás	30
4.1. Az elosztott hálózatleíró függvények kapcsolata a komplex admittanciával	31
4.2. RC egykapuk mérése és identifikációja az admittancia tartományban	32
5. A konvolúciós eszközkészlet gyakorlati alk.	34
5.1. Az időálló spektrum rendszeres mérési hibáinak korrekciója	35
5.1.1. A nemideális gerjesztés hatása	36
5.1.2. Példa: törtvonal közelítésű gerjesztés	38
5.1.3. A véges sáv szélességű mérőerősítő hatása	39
5.1.4. A nemideális gerjesztés és a véges határfrekvencia együttes kezelése	40
5.1.5. Példa: a nemideálisítások együttes kezelése	40

TARTALOMJEGYZÉK	2
5.2. RC hálózatok identifikációs algoritmusainak minősítése	41
5.2.1. Az eljárás menete	43
5.2.2. Időtartománybeli összehasonlítás	44
5.2.3. Direkt struktúra függvény összehasonlítás	46
5.2.4. A struktúra gyártási szórása	47
6. Divergáló operátorfüggvények regularizációja	48
6.1. A frekvenciatartomány \leftrightarrow időtartomány irányú transzformációk gyakorlati problémái	49
6.2. Zajérzékenység	50
7. Összefoglalás	52
A Az irodalmi áttekintéshez szükséges levezetések	54
A.1. A (2.58) egyenlet átrendezése	54
A.2. (2.63) belső relációi	55
B A tézisekhez szükséges levezetések, bizonyítások	56
B.1. (3.31) bizonyítása	56
B.2. Az $E(x)$ függvény alkalmas alakjai	57
B.3. Az $E_2(x)$ analitikus kifejezései	57
C A disszertációban használt jelölések	59

1. fejezet

Bevezetés

Az integrált áramkörök termikus problémáinak vizsgálata miatt az elmúlt két évtizedben az RC egykapuk kérdésköre ismét jelentős kutatási területté vált. A jobb termikus tervezés érdekében létfontosságúvá vált a termikus viselkedés modellezése. Általánosabban, gyakori probléma egy hálózat struktúrájának identifikálása mérésből vagy szimulációból (pl. egy egykapu póluszérus elrendezésének vagy transzfer impedanciájának megállapítása, ekvivalens helyettesítő áramkör előállítása időtartománybeli mérésből, stb.). A legtöbb esetben a számítások célja egy pontos modell vagy a valós fizikai struktúra meghatározása mérésekből.



Az elosztott RC hálózatelmélet főbb függvényeinek kapcsolata. Disszertációmiban a vastag szedéssel jelzett transzformációkat és függvényeket egészítettem ki, illetve definiáltam.

1.1. Célkitűzések

A témában született korábbi cikk [1] szerzője bemutatta, hogy az elosztott RC hálózatok sok esetben nem írhatóak le a klasszikus hálózatelméleti fogalmakkal – pólus-zérus elrendezés, időállandók –, az elosztott rendszerekre kiterjesztett párjukat kell használni. RC hálózatok esetén ezek a kiterjesztések a komplex sík negatív valós tengelyén értelmezett, valóst valósra képező két függvényként nyilvánulnak meg, amiket a továbbiakban összefoglalóan *leíró függvényeknek* nevezek.

A hálózatelméletben elvárt a különböző tartományok (idő, frekvencia, stb.) rendszerjellemző függvényeinek egyértelmű viszonya, ezért természetes igény ezen új elosztott leíró függvények viszonyát tisztázni. Első téziscsoportomban ezzel a kérdéskörrel foglalkozom. Az időállandó spektrum, a dipólus intenzitás függvény, valamint az általános hálózatleíró függvények valós és képzetes része közötti kapcsolatot fejezem ki konvolúciós formalizmussal.

A hálózatelmélet matematikai apparátusa döntően impedancia alapú, a vizsgált rendszereket azok impedanciájával jellemzi, ezek gerjesztő és válaszfüggvényeivel operál. A teljesség igényén túl bizonyos esetekben gyakorlati előnyökkel is jár egyes összefüggések admittancia alapú megfogalmazása. Második téziscsoportomban az előzőekben már tárgyalt *időállandó spektrum* és *dipólus intenzitás függvény* admittancia tartományú megfelelőjét tárgyalom, és megadom a tranziens mérésekre használt NID* módszer admittancia alapú alapegyenletét is.

A NID módszerre épülő mérés technikai eljárás egy szabványban rögzített módszer az integrált áramköri tokok félvezető átmenet-tok (junction-to-case) hőellenállásának megállapítására [2, 3]. Ennek a hőellenállásnak az ismerete különösen fontos a készüléktervezők számára, akiknek ez alapján kell megfelelő hűtőrendszert méretezni az adott áramkörhöz. Az áramkörgyártó cégek a termikus tranziens mérési eredmények kiértékelésével kapják meg a hőellenállás értéket, amit aztán az áramkör adatlapján közölnek. Ez a kiértékelés egy hálózatidentifikációs eljárás, ami az elosztott termikus rendszert leíró, diszkrétizált RC hálózatot eredményez Cauer kanonikus alakban.

Az [1, 4, 5] munkákban kifejtett elméletekre támaszkodva, a Mentor Graphics® cég T3Ster-Master [6] kereskedelmi szoftvere egy ilyen eljárást valósít meg, ez a legszélesebb körben elterjedt megoldás a termikus tranziens mérések kiértékelésére. Harmadik téziscsoportomban több, gyakorlati szempontból fontos kiegészítéssel láttam el ezt a mérés technikai eljárást. Az NID módszer alkalmazásakor azzal a feltételezéssel élünk, hogy egzakt a termikus válaszfüggvényünk, ami természetesen mérés esetén soha nem lehet igaz, kezelnünk kell az eltéréseket. Az eltérések több fizikai okra vezethetőek vissza. Az egységugrás gerjesztés bekapcsolási pillanata nem esik egybe a $t = 0$ időpillanattal, ahol ez az időpillanat a mért válaszunk időskálájának zérus pontja, ezáltal már a mérések kezdetén információt veszíthetünk. A gerjesztő ugrásfüggvény felfutási ideje véges, vagyis a gerjesztés frekvenciaeloszlása nem egyenletes. A használt mérőerősítő vágási frekvenciája véges. Rendkívül fontos ezen nemidealitások hatásának vizsgálata, hogy megállapíthassuk a jelenleg használt mérési és identifikációs eljárás pontosságát és korrigálhassuk ezeket a rendszeres hibákat.

Mivel a szabvány nem rögzíti azt, hogy milyen eszközt kell használni a méréshez és

* Network Identification by Deconvolution

identifikációhoz, ezért bárki alkalmazhat saját algoritmust és megvalósítást a probléma megoldására. Abban az esetben, ha ez az egyéni eljárás pontatlan, akkor a szabványosítási törekvés ellenére is pontatlan – szélsőséges esetben teljesen hamis – hőellenállás adatokat közölhetnek a gyártók. Ennek megelőzésére egy olyan eljárást dolgoztam ki, amivel a méréstől függetlenül vizsgálható és minősíthető az identifikációs módszer.

Az NID módszer alapját képező konvolúciós hálózatelméleti apparátus egyes műveleteket regularizált divergáló operátorfüggvényeket vezet be. Negyedik téziscsoportom a regularizáció hatását vizsgálja az alkalmazott impulzusfüggvény félértékszélességének függvényében.

2. fejezet

Irodalmi áttekintés

A lineáris RC hálózatok tárgyalása a termikus rendszerek vizsgálata kapcsán került ismét előtérbe a 80-as években. Konkrét matematikai és fizikai vizsgálatok nélkül, pusztán a tapasztalatra hagyatkozva is felismerhető, hogy az elektromos hálózatok és termikus rendszerek időtartománybeli viselkedése hasonló, hiszen hasonló kiegyenlítődési folyamatok zajlanak le. Egy feltöltött majd egy ellenálláson keresztül földelt kapacitás feszültség függvénye hasonló egy felmelegített anyagdarab szobahőmérsékletre hűlésének függvényéhez. E hasonlóság egzakt vizsgálata oda vezetett, hogy az elektromos rendszerek vizsgálatára kifejlesztett módszerek megfelelő peremfeltételek esetén alkalmazhatóvá váltak termikus rendszerek vizsgálatára is, valamint a meglévő eszközkészlet alkalmazhatóságának korlátait megfelelő módosítás segítségével ki lehetett terjeszteni.

Ebben a fejezetben irodalmi forrásokra támaszkodva foglalom össze azokat az elméleti alapokat, amelyekre saját munkámban támaszkodtam. Az [1, 4, 5] munkák egyes szakaszait részben szó szerint vettem át, a szerző hozzájárulásával.

2.1. Az elektronikus és termikus rendszerek közötti analógia

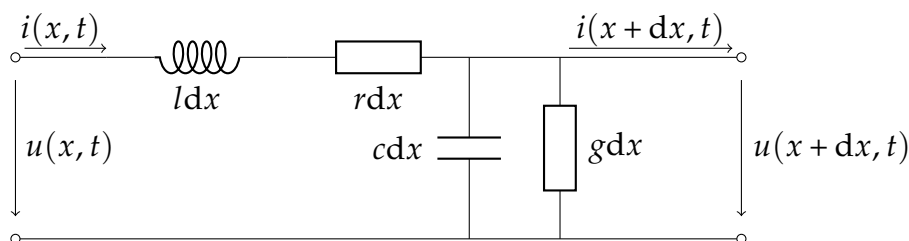
Első ránézésre egy termikus rendszer tranziens analízise igen bonyolult feladatnak tűnik. Egy parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldásával tudunk csak eljutni a kívánt eredményhez. Szerencsére már rendelkezésünkre áll egy jól kidolgozott matematikai apparátus egy hasonló probléma megoldására, a villamos rendszerek analízisére. Lényegesen könnyebb lenne a dolgunk, ha találnánk valamilyen összefüggést a két rendszert leíró összefüggések között.

2.1.1. Villamos rendszerek tranziense

A villamos rendszerek tranziensének vizsgálatához a távíró egyenletekből indulhatunk ki (2.1. ábra):

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x, t) = -ri(x, t) - l\frac{\partial}{\partial t}i(x, t) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}i(x, t) = gu(x, t) - c\frac{\partial}{\partial t}u(x, t), \quad (2.2)$$

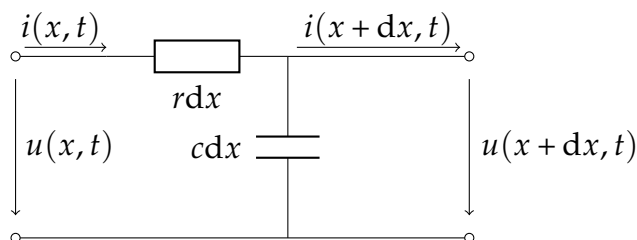


2.1. ábra. A távvezeték egy elemi szakaszának helyettesítő képe

ahol r, c, l, g a hosszegységre eső ellenállás, kapacitás, induktivitás és átvezetés. $l = g = 0$ peremfeltételek esetén a következő módon egyszerűsödnek az egyenleteink (2.2. ábra):

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -ri(x, t) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -c \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \quad (2.4)$$



2.2. ábra. Az egyszerűsödött RC modell

2.1.2. Termikus rendszerek tranziense

A termikus rendszerek vizsgálatához az egydimenziós hővezetés egyenletéből indulhatunk ki:

$$\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) - \rho c_f \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = 0, \quad (2.5)$$

ahol λ a termikus vezetőképesség, c_f a fajhő, ρ a sűrűség és T a hőmérséklet. Olyan rendszerekről beszélünk, ahol a hővezetés a domináns, a konvekció és a sugárzás pedig elhanyagolható.

Fourier törvénye alapján felírható a hőáram összefüggése, így a következő egyenletrendszer adódik:

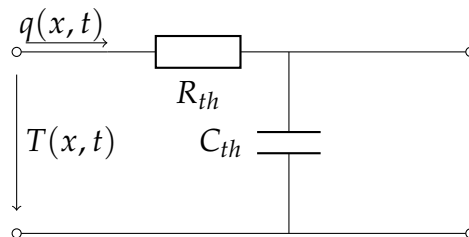
$$q = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \quad (2.6)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} q(x, t) - \rho c_f \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = 0, \quad (2.7)$$

ahol q a hőáram. Az x szerinti parciális deriváltakra rendezve az egyenleteket:

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x, t) = - \left(\frac{1}{\lambda} \right) q(x, t) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = -(\rho c_f) \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) \quad (2.9)$$



2.3. ábra. Termikus rendszerek modellje

Új jelöléseket bevezetve:

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x, t) = -R_{th} q(x, t) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = -C_{th} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t), \quad (2.11)$$

ahol $R_{th} = \frac{1}{\lambda}$ a hőellenállás és $C_{th} = \rho c_f$ a hőkapacitás.

A (2.3), (2.4) illetve (2.10), (2.11) között egyértelműen felfedezhető az analógia $u \Leftrightarrow T$ illetve $i \Leftrightarrow q$ megfeleltetéssel (2.3. ábra). Mivel sikerült megtalálnunk a megfeleltetést, a hővezetésdomináns* termikus problémák vizsgálatát visszavezethetjük villamos RC hálózatok vizsgálatára.

2.2. A klasszikus fogalmak kiterjesztése elosztott rendszerekre

A hálózatelméletben használt fogalmaink hosszú múltra tekintenek vissza. Mind valamilyen módon azt tükrözi, hogy a tárgyalt hálózat diszkrét elemeket tartalmaz, hiszen akár egy rendszer időállandói kerülnek szóba, akár a pólus-zérus elrendezés, ezek már magukban hordozzák azt, hogy véges számú időállandóról vagy pólusról beszélünk. Az egész matematikai apparátus erre rendezkedett be, ami tökéletesen elegendő a koncentrált paraméteres áramköri hálózatok tárgyalásakor.

Az előzőekben bemutatott analógiából látható, hogy elméletileg minden nehézség nélkül tárgyalhatjuk a termikus rendszerek viselkedését is úgy, mint egy egyszerű áramköri hálózatét. Az egyetlen feladatunk az, hogy valamilyen módon megalkossunk egy olyan ekvivalens áramköri kapcsolást, ami viselkedésében hűen visszaadja a termikus

* Kisjelű közelítésben az áramlás és a hőszugárzás esetén is.

rendszerünk viselkedését. Ha jobban elkezdjük vizsgálni az analógiában felfedett fogalompárokat, akkor arra a megállapításra jutunk, hogy a helyzet nem ilyen egyszerű. Ha például veszünk egy egyszerű áramköri struktúrát, mint amilyen egy integrált áramköri tok, ami tartalmaz egy áramkört, ami az egész rendszer hőforrása, már ezen is látszik, hogy a hőellenállás és a hőkapacitás tokon belüli eloszlása nem határolható be egzakt módon. A hőáramunk forrástól csak a tok széléig tartó útját vizsgálva is belátható, hogy ezen az úton a hőellenállás és hőkapacitás nem koncentráltan jelentkezik, ennek köszönhetően a rendszerünk időállandói folytonosan változnak, tehát egy elosztott rendszer.

Abban az esetben, ha már induláskor nem akarunk valamilyen önkényes diszkretizálást végrehajtani, akkor valamilyen módon definiálnunk kell az egyes fogalmak elosztott struktúrákra is használható változatát, ezzel új fogalmakat kell bevezetnünk.

Praktikussági okokból arra törekedünk, hogy a lineáris hálózatelméletből megszokott összefüggéseket konvolúciós összefüggések formájában írjuk fel. Ehhez csak egy dolog szükséges, valamennyi változónkat át kell skáláznunk logaritmikus léptékbe. A t időt, ω körfrekvenciát valamint az s komplex körfrekvenciát a következő jelöléssel használjuk:

$$z = \ln t \quad (2.12)$$

$$\Omega = \ln \omega \quad (2.13)$$

$$S = \ln s \quad (2.14)$$

Frekvencia esetén ez egy széles körben elterjedt megoldás, pl. a Bode diagram, amit Bode az 1940-es évek elején mutatott be [7]. A módszert időnként időre is alkalmazzák, pl. Siegal cikke logaritmikus időskálát javasol a termikus tranziens válaszok kezelésére [8], vagy Wiese és Weil megoldása egy olyan Fourier transzformációra, ahol a minták logaritmikus időközönként állnak rendelkezésre [9].

A következőekben feltételezzük a linearitást és a passzivitást.

2.2.1. Az időállandó spektrum

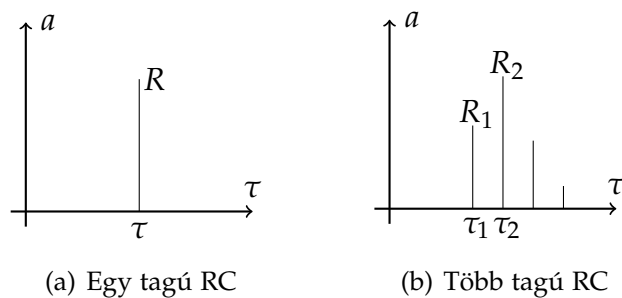
Mikrostruktúrák dinamikus termikus viselkedésének modellezéséhez egy RC kétpólust használhatunk [10]. Ez a kétpólus tulajdonképpen magát a hőelvezetést jellemzi, vagyis azt, hogy a hő keletkezésének helyétől milyen út vezet el a külvilágig.

Egy ilyen kétpólus jellemzésének a hálózatelméletből jól ismert módja, hogy valamilyen módon információt szerzünk az időállandóiról. Elsődlegesen az érdekel minket, hogy milyen időállandói vannak a rendszernek, és azoknak milyen az erőssége, intenzitása. Ezek meg fognak jelenni a kétpólusunk válaszfüggvényében.

Az időállandó fogalma arra a tényre épít, hogy az adott rendszer amit jellemez, diszkrét pólusokkal, diszkrét elemekkel rendelkezik. A termikus rendszerek azonban nem ilyen diszkrét rendszerek, elosztott paraméteres RC hálózatokkal írhatóak csak le. Valamilyen módon le kell írunk egy ilyen rendszer időállandóit. Erre szolgál az *időállandó spektrum*.

Ha egy egyszerű RC tag egységugrásra adott válasza $a(t)$, akkor azt a következő formában írhatjuk fel:

$$a(t) = R \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (2.15)$$



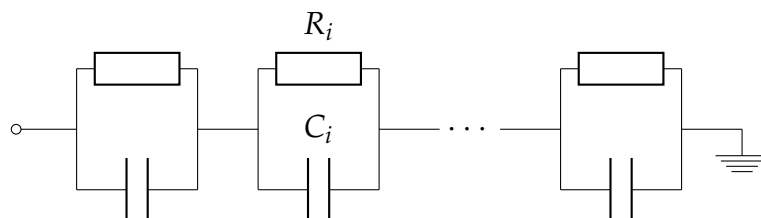
2.4. ábra. RC kétpólusok diszkrét időállandó spektruma

Ebben az esetben az időállandó spektrum egy R magasságú vonal (2.4. a) ábra).

Ha a kétpólusunk bonyolultabb és több időállandóval is rendelkező koncentrált paraméteres RC hálózat, akkor az ugrásválaszát a (2.15) formájú tagok összegeként adhatjuk meg.

$$a(t) = \sum_{i=1}^n R_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i} \right) \right) \quad (2.16)$$

Ennek spektruma sok, különböző időállandójú és különböző nagyságú vonalból áll (2.4. b) ábra). Az időállandóhoz tartozó R_i tényezőket az adott időállandó intenzitásának nevezzük. Ez azt adja meg, hogy az adott időállandó milyen intenzitással fog megjelenni az ugrásválaszban. Ez az R_i tag meg fog egyezni az i -ik időállandóhoz tartozó RC tag R ellenállásával.



2.5. ábra. RC kétpólus Foster helyettesítése

Ha ismert az ugrásválasz (2.16) alakja, akkor egyértelműen meghatározhatjuk az ezen függvényt megvalósító Foster hálózat (2.5. ábra) elemeinek az értékét. Az R_i intenzitások megegyeznek a Foster hálózat ellenállásaival, a kapacitásokat az időállandóból és az intenzitásból határozhatjuk meg: $C_i = \tau_i/R_i$.

Ha az elosztott paraméteres hálózatok irányába terjesztjük ki ezt a leképezést, akkor a 2.5. ábrán látható Foster hálózat elemeinek a számát kell növelnünk oly módon, hogy a meglévő időállandók közé újakat hozunk be, és ügyelünk arra, hogy az ellenállások összege ne változzon. Ha a hálózatunk elemeinek száma a végtelenhez tart, akkor a τ tengely mentén folytonossá válik az időállandók spektruma. Azonban ha figyelembe vesszük azt a kitélt, hogy az ellenállások összegének változatlanoknak kell lennie, akkor az egyes τ értékekhez tartozó intenzitások nullához tartanak. Véges nagyságú intenzitás

egy τ intervallumhoz tartozik. Ezek alapján definiálhatjuk az időállandók sűrűségét:

$$D(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\text{a } \tau \text{ és } \tau + \Delta\tau \text{ közé eső időállandók intenzitása}}{\Delta\tau} \quad (2.17)$$

(2.16) analógiájára ezzel a sűrűségfüggvénnyel felírhatjuk az elosztott paraméteres RC kétpólusunk ugrásválaszát.

$$a(t) = \int_0^{\infty} D(\tau) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) d\tau \quad (2.18)$$

A számításoknál célszerű áttérni a logaritmikus időtartományba. A logaritmikus idő változó (2.12) alapján logaritmikus, ennek megfelelően az időállandókat is transzformálnunk kell:

$$\zeta = \ln \tau \quad (2.19)$$

és le kell cserélnünk a $D(\tau)$ időállandó sűrűség függvényt az $R(\zeta)$ logaritmikus időállandó sűrűség függvényre:

$$R(\zeta) = \lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \frac{\text{a } \zeta \text{ és } \zeta + \Delta\zeta \text{ közé eső időállandók intenzitása}}{\Delta\zeta} \quad (2.20)$$

A logaritmikus időállandó sűrűséggel előállított ugrásválasz:

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\exp \zeta}\right)\right) d\zeta \quad (2.21)$$

Az időállandó spektrum meghatározása

Az időállandó spektrum meghatározásának problémája több oldalról is megközelíthető, annak függvényében, hogy milyen információk állnak a rendelkezésünkre. Tegyük fel, hogy jelen esetben az ugrásválasz áll rendelkezésünkre (pl. mérésből), így abból kell meghatároznunk az időállandó spektrumot. Írjuk be (2.12)-t (2.21) összefüggésbe.

$$a(z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) \left(1 - \exp(-\exp(z - \zeta))\right) d\zeta \quad (2.22)$$

Ez egy konvolúciós típusú integrálegyenlet. Deriváljuk a fenti integrálegyenletet z szerint:

$$\frac{d}{dz} a(z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) \exp(z - \zeta - \exp(z - \zeta)) d\zeta \quad (2.23)$$

Az alábbi módon definiáljuk a $w_t(z)$ függvényt:

$$w_t(z) = \exp(z - \exp(z)) \quad (2.24)$$

(2.23) és (2.24) összefüggésből:

$$\frac{d}{dz} a(z) = R(z) \otimes w_t(z) \quad (2.25)$$

Vagyis az ugrásválasz ismeretében egy dekonvolúciós lépéssel meghatározható az időállandó spektrum. Ez képezi a NID módszer alapját.

2.2.2. A dipólus intenzitás függvény

Egy elosztott RC hálózatnak sok esetben folytonos időállandó spektruma van, ezért a szokásos pólus-zérus leírás nem alkalmazható a mért impedancia függvény leírására. Általánosítva a pólus-zérus reprezentációt feloldható ez a probléma.

Egy koncentrált paraméteres RC egykapu általánosan leírható egy valós együtthatós racionális függvénnyel,

$$\mathbf{Z}(s) = R_0 \frac{(1 + s/\sigma_{z1})(1 + s/\sigma_{z2}) \cdots (1 + s/\sigma_{zn-1})}{(1 + s/\sigma_{p1})(1 + s/\sigma_{p2}) \cdots (1 + s/\sigma_{pn})} \quad (2.26)$$

ahol s a komplex frekvenciát, R_0 a teljes ellenállást, σ_p a pólusokat és σ_z a zérusokat jelöli. A pólusok és zérusok a teljes ellenállással minden információt tartalmaznak az egykapu jellemzéséhez. Ezt az egyértelmű reprezentációt nevezzük *pólus-zérus reprezentációnak*. (2.26) átrendezhető a következő formára:

$$\mathbf{Z}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{1 + s/\sigma_{pi}} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{1 + s\tau_i} \quad (2.27)$$

ahol

$$\tau_i = \frac{1}{\sigma_{pi}}. \quad (2.28)$$

(2.27) a (2.16) alakú ugrásválással rendelkező RC hálózat impedanciája.

Elosztott paraméteres egykapuk esetén az impedancia már nem írható le racionális függvénnyel. Néhány esetben azonban a pólus-zérus illetve az időállandó reprezentációval is leírható egy ilyen áramkör. Erre példa a véges hosszúságú, végén rövidzárral lezárt RC tápvonal. Az impedancia analitikus kifejezése [11]:

$$\mathbf{Z}(s) = \frac{1}{\sqrt{sK_0}} \operatorname{th} R_0 \sqrt{sK_0} \quad (2.29)$$

ahol $K_0 = c/r$, $R_0 = r \cdot L$, r a hosszegységre eső ellenállás, c a hosszegységre eső kapacitás és L a tápvonal hossza.

Ennek a függvénynek a pólusai és zérusai a bal komplex félsíkon, a $-\sigma$ tengelyen vannak, de számuk végtelen. A pólus és zérus frekvenciák:

$$\sigma_n = n^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{R_0^2 K_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.30)$$

ahol a páros n indexek jelentik a zérusokat, a páratlanok a pólusokat. Hasonló módon leírhatóak a válasz időállandói és azok intenzitásai:

$$\tau_n = R_0^2 K_0 \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \quad (2.31)$$

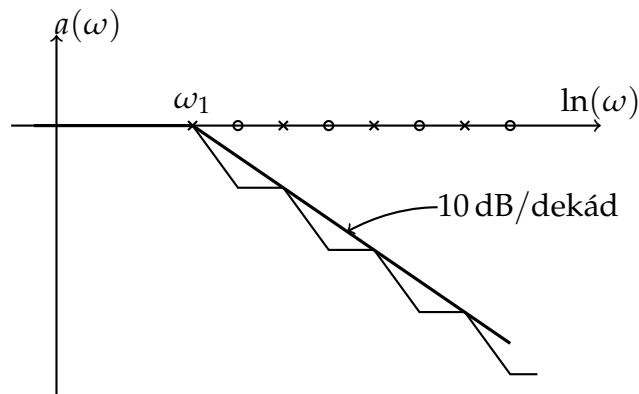
$$R_n = R_0 \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Vagyis ennek az áramkörnek létezik mind pólus-zérus mind időállandó reprezentációja, de az időállandók és a pólusok, zérusok száma végtelen.

A hálózatok egy következő osztályát képezik azok, ahol a leírás diszkrét pólusokkal és zérusokkal (vagy diszkrét időállandókkal) nem lehetséges. Erre példa a végtelen hosszú uniform[†] RC tápvonal. Ennek bemeneti impedanciája a vonal karakterisztikus impedanciája:

$$\mathbf{Z}(s) = \sqrt{\frac{r}{sc}}. \quad (2.32)$$

Ennek az impedancia függvénynek nincsenek pólusai és zérusai a negatív valós (σ) tengelyen. Ez az általános eset, amikor egy komplex nem uniform hálózatot vizsgálunk, ami végtelen hosszú. Jellemző tulajdonsága ezeknek az impedancia függvényeknek, hogy $\sqrt{j\omega}$ szorzók jelennek meg bennük. Ennek eredményeként a hálózat Bode diagramjában 10 dB/dekád meredekségű szakaszok jelennek meg [11]. A 2.6. ábrán egy ilyen amplitúdó menet látható. Ezt közelíteni tudjuk diszkrét pólusokkal és zérusokkal. Ha az ω_1 pontba egy pólust helyezünk, akkor a Bode diagram 20 dB/dekád meredekséggel fog csökkenni, ami túl meredek. Ha ezek után egy zérust helyezünk el, akkor a menet ismét zérus meredekségűvé válik. Ha változtatjuk a pólusokat és zérusokat úgy, hogy azok meredekség átlaga az amplitúdómenten az előírt meredekséget adja, akkor elméletileg tetszőleges meredekséget közelíteni tudunk.



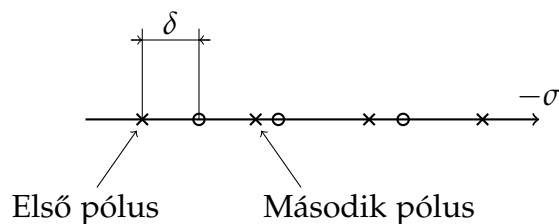
2.6. ábra. 10 dB/dekád meredekségű szakasz közelítése az amplitúdó meneten

Az előző példa esetében, ha a zérusok egyenlő távolságra vannak a szomszédos pólusoktól, akkor az eredő meredekség az előírt 10 dB/dekád lesz.

A közelítés pontosságát a pólusok és zérusok sűrűsége határozza meg, növelésével javíthatunk a pontosságon. Ebben az esetben a hálózatot jellemző információt nem a pólusok és zérusok száma hordozza (számuk a végtelenhez tart), csak a szomszédos pólus-zérus párok egymáshoz képesti helyzete: hatástalanítják-e egymás hatását vagy hagyják érvényesülni azt. A 2.7. ábrán látható módon, ha az első pólust $\delta \rightarrow 0$ távolságban követi zérus, akkor az a pólus kompenzálódik, de ha az első zérus a második pólushoz van közel, akkor az első pólus hatásos.

Egy másik megközelítés is lehetséges. Tekintsünk egy szomszédos pólus-zérus párt egy *dipólusnak*. Az *intenzitása* ennek a dipólusnak az őt alkotó pólus-zérus pár távolságától függ. Abban az esetben, ha a kettő egybeesik és kioltják egymást, akkor az intenzitás

[†] A hosszegységre eső ellenállás és kapacitás változatlan a teljes tápvonalon.



2.7. ábra. A zérusok relatív pozíciója két szomszédos pólus között

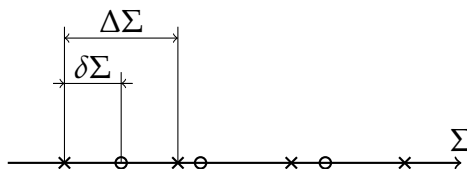
zérus. Ha a pólus-zérus távolság maximális (a zérus a következő pólusnál van), akkor az intenzitás is maximális. Válasszuk ezt a intenzitást egységnyinek.

Kényelmi megfontolásokból térjünk át logaritmikus változóra a negatív σ tengelyen:

$$\Sigma = \ln(-\sigma). \quad (2.33)$$

Vizsgáljunk meg egy két pólus által határolt $\Delta\Sigma$ intervallumot a logaritmikus Σ tengelyen (2.8. ábra). A bal oldali pólus és a zérus távolsága $\delta\Sigma$. Tegyük fel, hogy a pólusok és zérusok sűrűsége végtelenhez tart. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\Delta\Sigma$ végtelenül kicsi lesz. Ebben az esetben a *dipólus intenzitás függvénye*:

$$I_d(\Sigma) = \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} \frac{\delta\Sigma}{\Delta\Sigma}. \quad (2.34)$$

2.8. ábra. A zérusok relatív pozíciója két szomszédos pólus között a Σ tengelyen

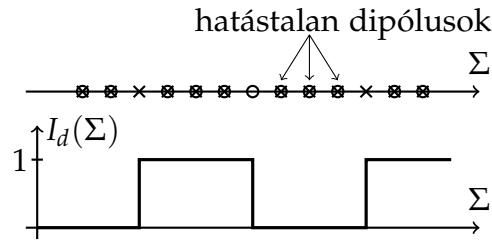
Ha figyelembe vesszük, hogy egy RC kapu impedanciájában a pólusok és zérusok alternálnak, abból egyenesen következik, hogy

$$0 \leq I_d \leq 1. \quad (2.35)$$

Egy végtelen, elosztott RC kétpólus esetén a dipólus intenzitás függvénynek általánosan olyan tartományai vannak, ahol I_d értéke 0 és 1 között változik. A 2.6. ábrán látható Bode diagram esetén, ahol 10 dB/dekád a meredekség, I_d értéke 0.5. Koncentrált paraméteres hálózatok esetén I_d csak 0 vagy 1 lehet. Ezt szemlélteti a 2.9. ábra, ahol a felfutó él pólust, a lefutó zérust jelent.

2.2.3. A dipólus intenzitás függvény kapcsolata az impedancia függvénnyel

A fentebb bevezetett függvények azáltal válnak alkalmazhatóvá, hogy egyértelmű a kapcsolatuk az impedancia függvénnyel. Koncentrált paraméteres esetben (2.26) és (2.27)



2.9. ábra. Koncentrált paraméteres hálózat távírójelre emlékeztető dipólus intenzitás függvénye

biztosítja ezt a kapcsolatot. Ilyen kapcsolat megállapítható a két elosztott leíró függvény és az impedancia függvény között is. Külön érdemes kiemelni az összefüggések nagyfokú szimmetriáját. Ha ismerjük a $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ impedancia függvényt, az időállandó spektrum és a dipólus intenzitás függvény a következő két összefüggéssel számítható [1]:

$$R(\zeta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{Z}(\mathbf{s} = -\exp(-\zeta)) \right\} \quad (2.36)$$

és

$$I_d(\Sigma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \ln \mathbf{Z}(\mathbf{s} = -\exp(\Sigma)) \right\}. \quad (2.37)$$

Ha adott az egyik a két reprezentáció közül, akkor a másik számítható:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{S}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(-x)}{1 + \exp(\mathbf{S} - x)} dx \quad (2.38)$$

vagy

$$\mathbf{Z}(\mathbf{S}) = R_0 - \int_{-\infty}^{\infty} R(-x) \frac{\exp(\mathbf{S} - x)}{1 + \exp(\mathbf{S} - x)} dx \quad (2.39)$$

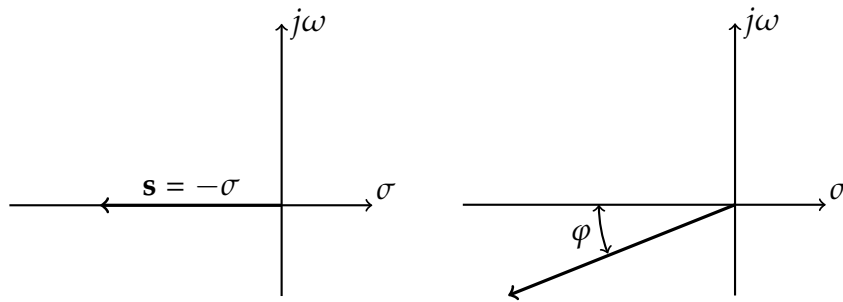
$$\ln \mathbf{Z}(\mathbf{S}) = \ln R_0 - \int_{-\infty}^{\infty} I_d(x) \frac{\exp(\mathbf{S} - x)}{1 + \exp(\mathbf{S} - x)} dx, \quad (2.40)$$

ahol $\mathbf{S} = \ln \mathbf{s}$, lásd (2.14).

Az egyértelmű összefüggések ellenére az egyes számítások csak nagy körültekintéssel végezhetőek el. (2.36) azt mutatja, hogy az impedancia képzetes részét a komplex sík negatív valós tengelyén haladva kell kiszámítani. A tengely mentén rendszerint szingularitások vannak, pl. a koncentrált paraméteres hálózatok pólusai vagy szinguláris vonalak elosztott rendszerek esetén. Ezek a szingularitások megnehezítik (2.36) használatát az időállandó spektrum számításához.

Ezek a problémák megkerülhetőek egy közelítés alkalmazásával. A *veszélyes* területek elkerülése érdekében kerülnünk kell a negatív valós tengelyt (2.10. ábra). Egy a tengelyhez megfelelően közeli vonalat kell használnunk [12],

$$\mathbf{s} = -(\cos \varphi + j \sin \varphi) \exp(-z), \quad (2.41)$$

2.10. ábra. Az $s(z)$ vonal a komplex síkon

így az integrálások elvégezhetővé válnak. Természetesen a φ szögnek kicsinek kell lenni, nem lehet több, mint $2^\circ - 5^\circ$. Még ilyen kis szögek esetén is hibát viszünk a számításba. Bizonyítható, hogy a számított $R_c(z)$ időállandó spektrum kifejezhető az egzakt spektrum és egy hibafüggvény konvolúciójával:

$$R_c(z) = \frac{\pi - \varphi}{\pi} R(z) \otimes e_r(z), \quad (2.42)$$

ahol

$$e_r(z) = \frac{1}{\pi - \varphi} \frac{\sin \varphi \exp(-z)}{1 - 2 \cdot \cos \varphi \exp(-z) + \exp(-2z)}. \quad (2.43)$$

Ez a függvény egy keskeny impulzus egységnyi területtel. Csökkenő φ mellett $e_r(z)$ egyre keskenyebb lesz, vagyis tetszőleges pontosság elérhető megfelelően kis φ szög alkalmazásával. A félértékszélesség, ami a felbontás mértéke, a következő:

$$\Delta_e = 2 \ln \left(2 - \cos \varphi + \sqrt{(2 - \cos \varphi)^2 - 1} \right) \simeq 2\varphi. \quad (2.44)$$

Ha pl. $\varphi = 2^\circ$, akkor a felbontás 0.1 oktáv, ami azt jelenti, hogy két pólus akkor megkülönböztethető, ha a frekvenciáik aránya nagyobb, mint 1.072.

Az előzőekben bemutatott számítási probléma a (2.36) időállandó spektrum meghatározásakor a dipólus intenzitás függvény (2.37) egyenletének kiértékelésekor is megjelenik. A bemutatott módszer a szingularitások elkerülésére ebben az esetben is alkalmazható.

2.3. Egyes alapösszefüggések átfogalmazása konvolúció segítségével

Az előző fejezetben bevezetett logaritmikus változók felhasználásával több lineáris hálózatelméleti összefüggés konvolúciós egyenletté alakítható. Például vizsgáljuk meg az $a(t)$ egységugrásra adott időtartománybeli válaszfüggvény kapcsolatát a $\mathbf{Z}(\omega)$ frekvenciatartománybeli impedancia függvényével, ha alkalmazzuk a Laplace transzformációt:

$$\mathbf{Z}(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{da}{dt} \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.45)$$

Behelyettesítve a $da/dt = da/dz \cdot dz/dt$, $\omega = \exp(\Omega)$, $t = \exp(z)$ és $x = -z$ tagokat a következő formára jutunk:

$$\mathbf{Z}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{da}{dz} \right|_{x=-z} \exp(-j \exp(\Omega - x)) dx, \quad (2.46)$$

ami egy konvolúciós egyenlet az időtartománybeli válasz és egy $\mathbf{W}(\Omega)$ súlyfüggvény között:

$$\mathbf{Z}(\Omega) = \left. \frac{da}{dz} \right|_{\Omega=-z} \otimes \mathbf{W}(\Omega), \quad (2.47)$$

ahol

$$\mathbf{W}(\Omega) = \exp(-j \exp(\Omega)). \quad (2.48)$$

A $\mathbf{W}(\Omega)$ egy operátorként viselkedik.

Mivel a tárgyalt hálózatok lineáris, passzív áramkörök, amik leírhatóak a *meghajtási pontjukkal* vagy *transzfer impedanciájukkal*, a $\mathbf{Z}(s)$ komplex impedancia szingularitásai a $\sigma < 0$ félsíkon helyezkednek el, ahol

$$\mathbf{s} = \sigma + j\omega. \quad (2.49)$$

2.3.1. Időtartomány \rightarrow frekvenciatartomány irányú transzformáció

A (2.47) egyenlettel már bemutatásra került egy konvolúciós megközelítés. Először az $a(t)$ választ transzformáljuk:

$$a(z) = a(t = \exp(z)) \quad (2.50)$$

ahol a (2.12) egyenletet alkalmaztuk. Szétválasztva a valós és képzetes tagokat:

$$\operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} = W_R(\Omega) \otimes \left. \frac{da}{dz} \right|_{\Omega=-z} \quad (2.51)$$

$$\operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} = W_I(\Omega) \otimes \left. \frac{da}{dz} \right|_{\Omega=-z} \quad (2.52)$$

ahol

$$W_R(\Omega) = \cos(\exp(\Omega)) \quad (2.53)$$

$$W_I(\Omega) = -\sin(\exp(\Omega)). \quad (2.54)$$

Ha ismerjük az $a(t)$ időtartománybeli választ, a frekvenciatartománybeli viselkedés kiszámítható a (2.51) és (2.52) konvolúciós egyenletek alkalmazásával.

2.3.2. Hálózatjellemező függvények valós és képzetes része közötti összefüggés

Konvolválva a (2.51) egyenletet a $W_I(\Omega)$ függvénnyel és a (2.52) egyenletet $W_R(\Omega)$ -val

$$W_I(\Omega) \otimes \operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} = W_I(\Omega) \otimes W_R(\Omega) \otimes \left. \frac{da}{dz} \right|_{\Omega=-z} \quad (2.55)$$

$$W_R(\Omega) \otimes \text{Im} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} = W_R(\Omega) \otimes W_I(\Omega) \otimes \left. \frac{da}{dz} \right|_{\Omega=-z}. \quad (2.56)$$

Az egyenletek jobb oldala természetesen egyenlő, ha figyelembe vesszük a konvolúció kommutatív és asszociatív tulajdonságát. Ebből következik, hogy

$$W_I(\Omega) \otimes \text{Re} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} = W_R(\Omega) \otimes \text{Im} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \}. \quad (2.57)$$

2.3.3. Frekvenciatartomány \rightarrow időtartomány irányú transzformáció

A levezetéshez a Riemann-Mellin inverziós integrált kell felhasználnunk. $\sigma = 0$, $-\infty < \omega < +\infty$ integrálási utat alkalmazva az integrál felírható, mint

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} \mathbf{Z}(s) \cdot \exp(st) ds. \quad (2.58)$$

Ez az egyenlet a következő alakra hozható (részletes levezetés az A.1 függelékben):

$$\begin{aligned} \left. \frac{da}{dz} \right|_{\zeta=-z} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \exp(\Omega - \zeta) \cos(\exp(\Omega - \zeta)) d\Omega - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \exp(\Omega - \zeta) \sin(\exp(\Omega - \zeta)) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.59)$$

(2.59) olyan integrálokat tartalmaz, amik a súlyfüggvények tükrözésével az Ω tengelyen konvolúciós alakra hozhatóak. Átírva az egyenletet:

$$\begin{aligned} \left. \frac{da}{dz} \right|_{z=-\Omega} &= \frac{1}{\pi} \text{Re} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \otimes \left(\exp(-\Omega) \cos(\exp(-\Omega)) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \text{Im} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \otimes \left(\exp(-\Omega) \sin(\exp(-\Omega)) \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

A tömörebb írásmód érdekében további két súlyfüggvény vezethető be:

$$W'_R(\Omega) = -\exp(\Omega) \cdot \sin(\exp(\Omega)) \quad (2.61)$$

$$W'_I(\Omega) = -\exp(\Omega) \cdot \cos(\exp(\Omega)). \quad (2.62)$$

Ezek a függvények (2.53) és (2.54) deriváltjai. Felhasználva ezeket a súlyfüggvényeket (2.60) átírható:

$$\left. \frac{da}{dz} \right|_{z=-\Omega} = -\frac{1}{\pi} \text{Re} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \otimes W'_I(-\Omega) + \frac{1}{\pi} \text{Im} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \otimes W'_R(-\Omega). \quad (2.63)$$

Ez az egyenlet azt sugallja, hogy mindkét tagra, $\text{Re} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \}$ -ra és $\text{Im} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \}$ -ra szükség van az $a(t)$ időtartománybeli válasz meghatározásához. Szerencsére a helyzet ennél

egyszerűbb. A valós és képzetes rész közötti alkalmas összefüggés levezetésével bizonyítható, hogy (2.63) egyenletben az összeg két tagja a jobb oldalon egyenlő (lásd A.2). Így

$$\left. \frac{da}{dz} \right|_{z=-\Omega} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \otimes W'_I(-\Omega) \quad (2.64)$$

vagy

$$\left. \frac{da}{dz} \right|_{z=-\Omega} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \otimes W'_R(-\Omega). \quad (2.65)$$

Ez azt jelenti, hogy az impedancia függvény valós vagy képzetes részének ismeretében az időtartománybeli válasz meghatározható a két konvolúciós egyenlet (2.64-2.65) valamelyike segítségével.

3. fejezet

Az elosztott RC hálózatok elméletének konvolúciós megfogalmazása

1. tézis. Az elosztott RC hálózatok elméletének konvolúciós megfogalmazása terén az alábbi eredményeket értem el:

1.1. tézis. Meghatároztam az időállandó spektrum és a dipólus intenzitás függvények kapcsolatát adó transzformációs egyenleteket. Megállapítottam, hogy ezek az összefüggések a konvolúción túl nemlineáris műveletet is tartalmaznak, a két rendszerjellemező függvény kapcsolata tehát nemlineáris. [JN1]

$$I_d(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcus} \left(R_M(x) \otimes \frac{1}{1 - \exp(x)} \right)$$
$$R_M(x) = \frac{1}{\pi} R_0 \cdot \operatorname{Im} \left\{ \exp \left(I_d(x) \otimes \frac{\exp(x)}{1 - \exp(x)} \right) \right\}$$

1.2. tézis. Megállapítottam, hogy a hálózatleíró függvények valós és képzetes része közötti összefüggést megadó Bode integrál megfelelő átfogalmazással beilleszthető az elosztott hálózatelmélet konvolúciós eszköztárába.

Meghatároztam az ehhez szükséges operátorfüggvényeket. [J1]

$$W_{\operatorname{Re} \operatorname{Im}}(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$$
$$W_{\operatorname{Im} \operatorname{Re}}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\exp(-x)}{\operatorname{sh}(x)}$$

3.1. Kapcsolat az időállandó spektrum és a dipólus intenzitás függvény között

A 2. fejezetben láthattuk, hogy lineáris és elosztott passzív RC egykapuk leírhatóak az $R(\zeta)$ időállandó spektrummal vagy az $I_d(\Sigma)$ dipólus intenzitás függvénnyel.

Mivel mindkét leírásmód teljes és kölcsönösen egyértelmű, ezért az egyikből következik a másik. Következésképpen léteznie kell egy direkt útnak, hogy az egyik ismeretében a másikat meghatározzuk. Ennek az elvárásnak első sorban elméleti jelentősége van, hiszen a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a két leíró függvény között egy erős elvárás. Gyakorlati előnye akkor várható egy ilyen algoritmusnak, ha csak az $I_d(\Sigma)$ függvényt ismerjük és szükségünk van $R(\zeta)$ -ra vagy fordítva.

A kapcsolat levezetéséhez (2.37) és (2.38) egyenletekből érdemes kiindulni, mivel mindkét függvény kapcsolata ismert a $\mathbf{Z}(s)$ impedancia függvénnyel.

Komplex függvényekre igazak a következő logaritmikusan azonosságok:

$$\ln(\mathbf{Z}) = \ln(\text{abs}(\mathbf{Z})) + j \cdot \text{arcus}(\mathbf{Z}), \quad (3.1)$$

$$\text{Im} \{ \ln(\mathbf{Z}) \} = \text{arcus}(\mathbf{Z}). \quad (3.2)$$

Ezek alapján (2.37) átalakítható az

$$I_d(\Sigma) = \frac{1}{\pi} \text{arcus} \left(\mathbf{Z}(s = -\exp(\Sigma)) \right) \quad (3.3)$$

alakra. $\mathbf{Z}(s)$ helyére a (2.38) egyenletet helyettesítve egy olyan összefüggést kapunk, ami megadja a dipólus intenzitás függvény és az időállandó spektrum egyirányú kapcsolatát. Figyelembe kell vennünk ugyanakkor, hogy

- a (3.3) alkalmazásakor s helyett $-\exp(\Sigma)$ írandó, mivel a negatív valós tengelyen megyünk és Σ logaritmikusan léptékezésű,
- $\mathbf{S} = \ln(s)$, ezért \mathbf{S} helyére $\ln(-\exp(\Sigma)) = \Sigma + j\pi$ írandó.

Ezek alapján:

$$I_d(\Sigma) = \frac{1}{\pi} \text{arcus} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(-x)}{1 - \exp(\Sigma + j\pi - x)} dx \quad (3.4)$$

$$I_d(\Sigma) = \frac{1}{\pi} \text{arcus} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(-x)}{1 - \exp(\Sigma - x)} dx \quad (3.5)$$

Ez egy korrelációs integrál. Ha az integrandus számlálóját tükrözzük, akkor konvolúcióra jutunk:

$$I_d(\Sigma) = \frac{1}{\pi} \text{arcus} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_M(x)}{1 - \exp(\Sigma - x)} dx \quad (3.6)$$

$$I_d(x) = \frac{1}{\pi} \text{arcus} \left(R_M(x) \otimes \frac{1}{1 - \exp(x)} \right) \quad (3.7)$$

ahol $R_M(x) = R(-x)$ a tükrözött időállandó spektrum.

Az időállandó spektrum \rightarrow dipólus intenzitás függvény transzformációs sémát ezzel megkaptuk. A másik irány meghatározásához induljunk ki a (2.40)-es egyenletből. Vegyük mindkét oldal exponenciális függvényét:

$$\exp(\ln(\mathbf{Z}(s))) = \mathbf{Z}(s) = R_0 \cdot \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} -I_d(x) \frac{\exp(\mathbf{S} - x)}{1 + \exp(\mathbf{S} - x)} dx\right) \quad (3.8)$$

Behelyettesítve $\mathbf{S} = \Sigma + j\pi - t$:

$$\mathbf{Z}(\Sigma) = R_0 \cdot \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} -I_d(x) \frac{\exp(\Sigma + j\pi - x)}{1 + \exp(\Sigma + j\pi - x)} dx\right) \quad (3.9)$$

Behelyettesítve (3.9)-t a (2.36) egyenletbe:

$$R(\Sigma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ R_0 \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} -I_d(x) \frac{-\exp(\Sigma - x)}{1 - \exp(\Sigma - x)} dx\right) \right\} \quad (3.10)$$

Az R_0 és egy negatív előjel kiemelése után a

$$R(\Sigma) = \frac{1}{\pi} R_0 \cdot \operatorname{Im} \left\{ \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} I_d(x) \frac{\exp(\Sigma - x)}{1 - \exp(\Sigma - x)} dx\right) \right\} \quad (3.11)$$

alakra jutunk.

A (3.7) esetén alkalmazott tükrözéssel ismét konvolúciós egyenletre jutottam:

$$R_M(x) = \frac{1}{\pi} R_0 \cdot \operatorname{Im} \left\{ \exp\left(I_d(x) \otimes \frac{\exp(x)}{1 - \exp(x)}\right) \right\} \quad (3.12)$$

A (3.7) és (3.12) egyenletekből jól látszik, hogy ezek az összefüggések nemlineárisak az $\arcsin()$ és $\exp()$ függvények miatt. A konvolúciós lépés lineáris, vagyis a transzformációk egy lineáris és egy azt követő nemlineáris lépésből állnak.

A (3.6) és (3.11) egyenletek kiértékelésekor több gyakorlati problémába ütközünk. Ezek improprius integrálok, szakadásuk van, ha a nevező zérus. Ez a probléma feloldható, mivel az $1/(1 - \exp(x))$ integráljának létezik zárt alakú kifejezése, és a szakadásos tartományban alkalmazható Cauchy főérték tétele [13]. Egy másik praktikus megoldás az eredeti egyenlet módosítása:

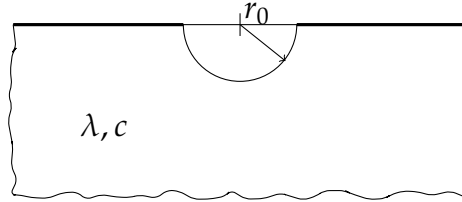
$$I_d(\Sigma) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\pi - \varphi} \operatorname{arcus} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(-x)}{1 - \exp(\Sigma - j\varphi - x)} dx \right) \quad (3.13)$$

Az így behozott hiba megegyezik egy keskeny impulzussal való konvolúció eredményével [14]:

$$e(z) = \frac{1}{\pi - \varphi} \frac{\sin \varphi \cdot \exp(z)}{1 - 2 \cos \varphi \exp(z) + \exp(2z)}, \quad (\sim \pi)$$

ahol a keskeny impulzus integrálja egységnyi, félértékszélessége közel 2φ . Ez az impulzus tulajdonképpen megegyezik (2.43) impulzussal egy $z = -z$ tükrözéstől eltekintve. Az időállandó spektrum számításakor ugyanez a technika alkalmazható.

3.1.1. Példák az időállandó spektrum \leftrightarrow dipólus intenzitás függvény transzformációkra

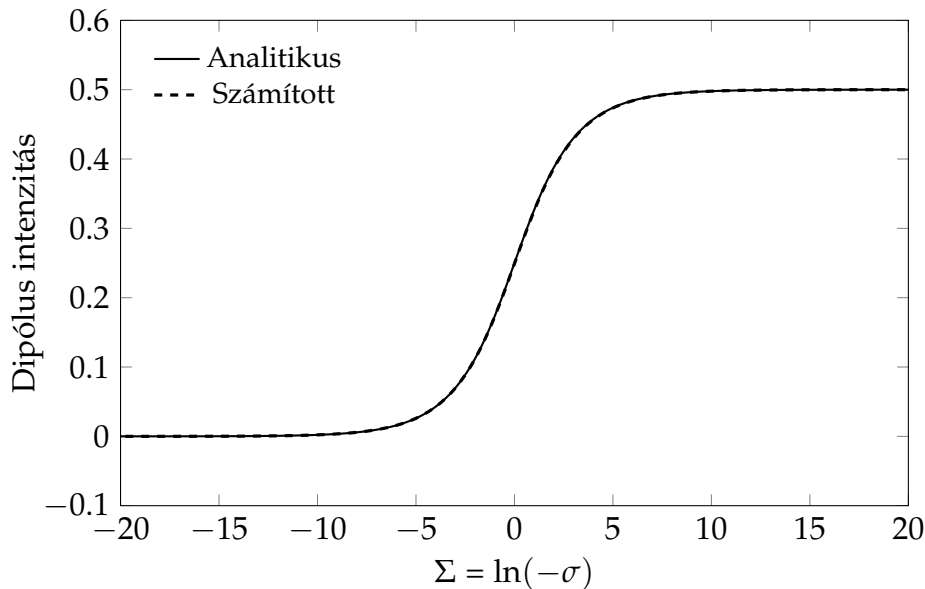


3.1. ábra. Az elosztott termikus RC struktúra

Ahhoz, hogy demonstrálni tudjuk gyakorlati példákkal is az előző rész eredményeit, egy olyan tesztstruktúrát választottam, aminek analitikusan ismert leíró függvényei vannak. Ez a struktúra egy elosztott termikus RC hálózat, a gömbszerű hőterjedés végtelen féltérben (3.1. ábra) [15]. A bemeneti kapu egy r_0 sugarú félgömb. Felhasználva a probléma analitikus megoldását [16] a bemeneti impedancia

$$\mathbf{Z}(s) = \frac{1}{2\pi\lambda r_0} \frac{1}{1 + r_0\sqrt{sc/\lambda}} \quad (3.15)$$

ahol λ és c az egységnyi térfogatra vett hővezetőképesség és hőkapacitás.

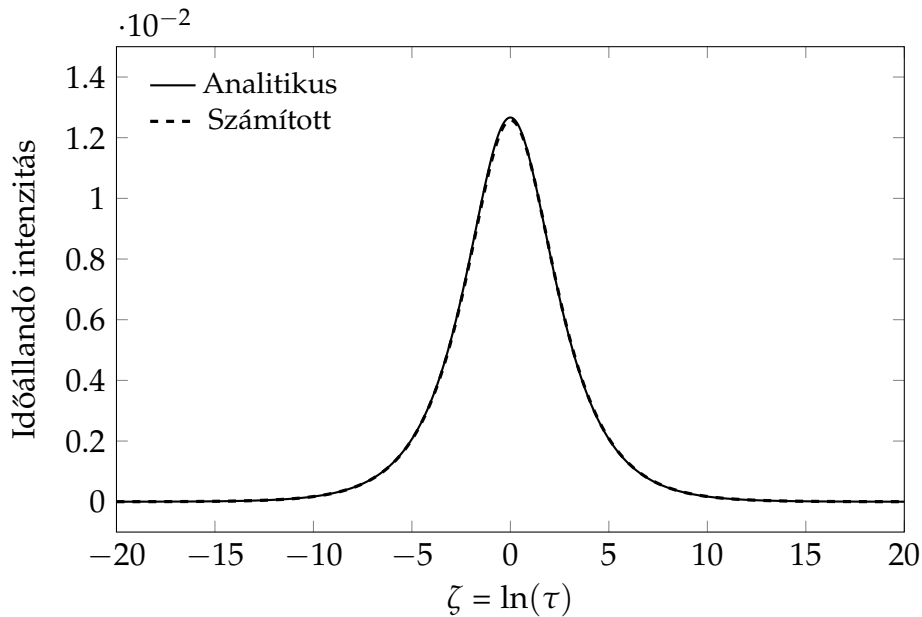


3.2. ábra. A $R(\zeta) \rightarrow I_d(\Sigma)$ transzformáció eredménye

Felhasználva a (2.36) és (3.3) egyenleteket a két leíró függvény analitikusan meghatározható:

$$R(\sigma) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 + r_0^2\sigma c/\lambda} \quad (3.16)$$

$$I_d(\sigma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(r_0 \sqrt{c/\lambda} \sqrt{\sigma} \right). \quad (3.17)$$



3.3. ábra. Az $I_d(\Sigma) \rightarrow R(\zeta)$ transzformáció eredménye

Az eredmények teszteléséhez a transzformációkat C programozási nyelven valósítottam meg. Először a $R(\zeta) \rightarrow I_d(\Sigma)$ irányt teszteltem (3.6) numerikus megoldásával. Az alkalmazott mintavételezési gyakoriság 0.02. Az integrandus szakadását $\varphi = 0.02$ korrekcióval kerültem el. Az analitikus és a numerikusan számított eredmény a 3.2. ábrán látható. Jól látható, hogy az egyezés a számított és az analitikus eredmények között nagyon jó.

A transzformáció $I_d(\Sigma) \rightarrow R(\zeta)$ teszteléséhez a (3.11) integrált határoztam meg numerikusan. A mintavételezés szintén 0.02, $\varphi = 0.02$. Az analitikus függvény és a numerikus számítás eredménye látható a 3.3. ábrán. Látható, hogy az egyezés ebben az esetben is rendkívül jó.

Az $R(\zeta)$ és $I_d(\Sigma)$ rendszerjellemező függvények elsődleges felhasználása az elosztott hálózatok területe, de természetesen használhatóak koncentrált paraméteres hálózatok jellemzésére is. Ebben az esetben az időálló spektrum csak diszkrét spektrum vonalakat fog tartalmazni. A dipólus intenzitás függvény egy távíró jelre emlékeztet, ahol a $0 \rightarrow 1$ átmenet pólust, az $1 \rightarrow 0$ átmenet zérust jelent [1].

Második példa egy koncentrált paraméteres RC hálózat. Ebben az esetben (3.6) és (3.11) transzformációk szummázással helyettesíthetők:

$$I_d(\Sigma) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\pi - \varphi} \operatorname{arcus} \sum_i \frac{R_i}{1 - \exp(\Sigma + j\varphi - x_i)}, \quad (3.18)$$

ahol R_i, τ_i az időálló spektrum diszkrét vonalai és $x_i = \ln(1/\tau_i) = -\ln(\tau_i)$. A vizsgált koncentrált paraméteres hálózat négy pár RC tagot tartalmaz.* Az elemértékek a 3.1.

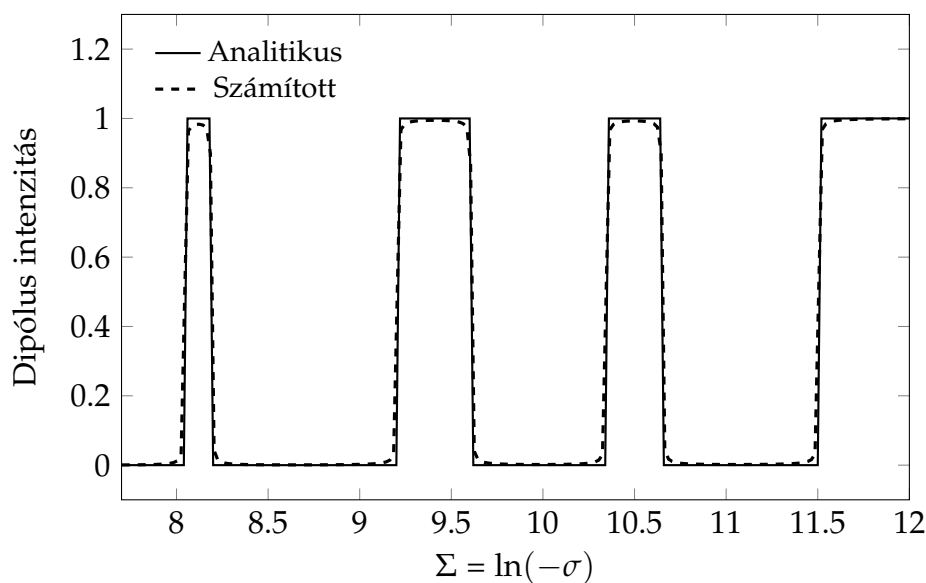
* A példahálózat egy a témában megjelent korábbi publikáció teszhálózata [15].

táblázatban láthatóak. Ezek az értékek egyértelműen meghatározzák a példahálózat idő-

τ [μs]	316	100	31.6	10
Amplitúdó [$\text{k}\Omega$]	1	2	1	2

3.1. táblázat. A koncentrált paraméteres hálózat elemértékei

állandó spektrumát. Minden RC tag egy spektrum vonalat hoz létre R_i amplitúdóval a τ_i helyen. A (3.18) alkalmazásával meghatározhatjuk a hálózat dipólus intenzitás függvényét. A számított eredmény az analitikussal együtt a 3.4. ábrán látható. Az alkalmazott mintavételezés gyakorisága 0.02, $\varphi = 0.002$.



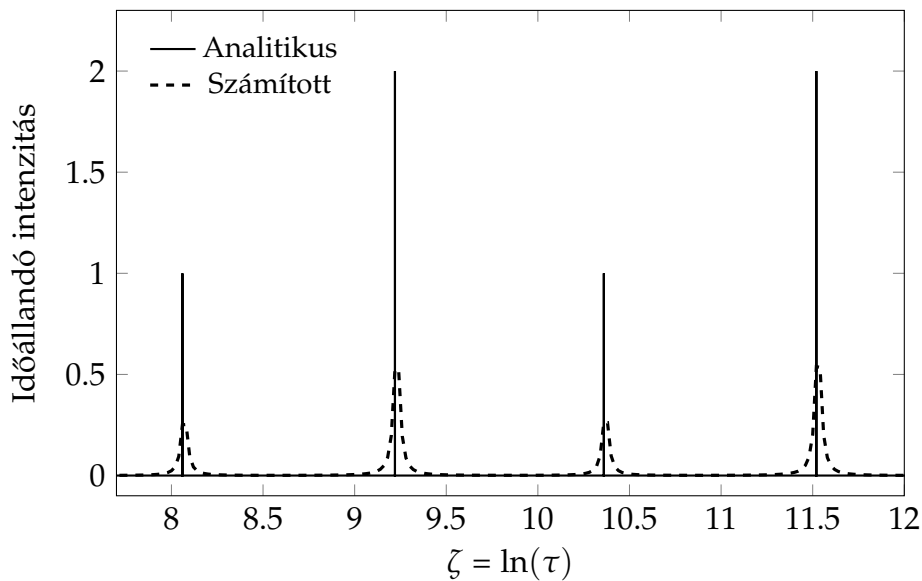
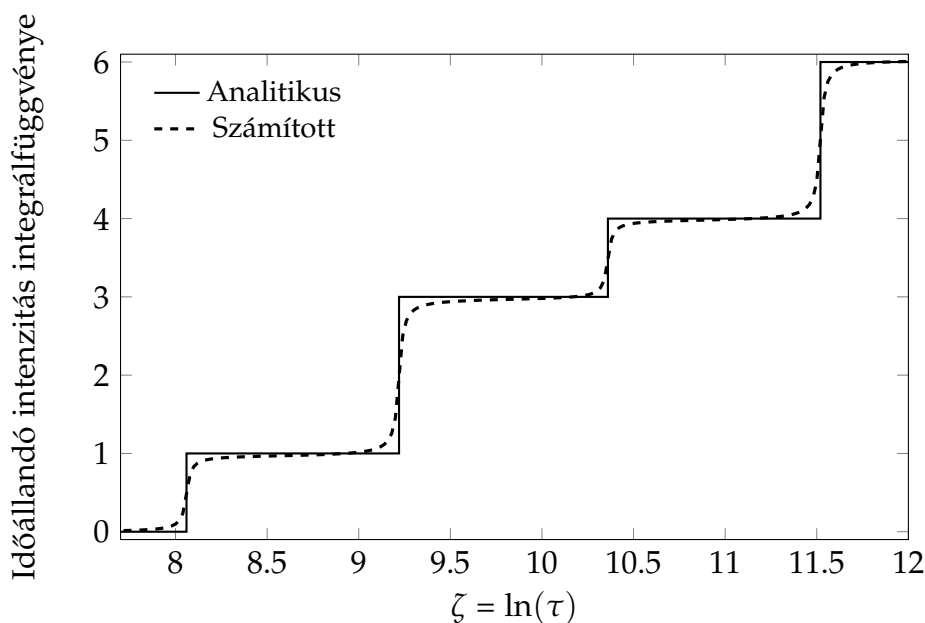
3.4. ábra. Az $R(\zeta) \rightarrow I_d(\Sigma)$ transzformáció eredménye

Természetesen az $I_d(\Sigma) \rightarrow R(\zeta)$ is tesztelhető koncentrált paraméteres hálózat esetén. (3.11) integrált kell numerikusan meghatározni. Az alkalmazott mintavételi gyakoriság 0.02, $\varphi = 0.02$ volt. A számított és az analitikus eredmény a 3.5. ábrán látható.

Ennek az eredménynek a kiértékelését nagyban megkönnyíti, ha definiáljuk az időállandó spektrum kumulatív integrál függvényét. Diszkrét időállandók esetén ennek egy lépcsőfüggvény lesz az eredménye. A 3.6. ábrán látható, hogy az analitikus lépcsőfüggvényt közelíti a számított időállandó spektrumból meghatározott integrálfüggvény.

3.2. A Bode integrál átfogalmazása

Hendrik W. Bode a több mint hat évtizede megjelent könyvében [17] írta le a villamos hálózatleíró függvények valós és képzetes része közötti kapcsolatot. Az egyik jelentős állítása, ha ismerjük a leíró függvény valós részét, az egyértelműen meghatározza

3.5. ábra. Az $I_d(\Sigma) \rightarrow R(\zeta)$ transzformáció eredménye3.6. ábra. Az $I_d(\Sigma) \rightarrow R(\zeta)$ transzformáció eredményének integrálfüggvénye

a képzetest és viszont.[†] A hálózatleíró függvények kapcsolatát megfogalmazó integrálegyenletek egy része a logaritmusos frekvencia tengelyen lett megfogalmazva. Az egyik ilyen *Bode integrál* a következő alakú [17]:

$$b_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{du} \ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2} du \quad (3.19)$$

[†] Ezek az állítások akkor igazak, ha a hálózat teljesíti a minimális fázisfeltételt.

ahol a a valós, b_c a hálózati függvény képzetes része az ω_c frekvencián. u a logaritmusos frekvencia, $u = \ln(\omega/\omega_c)$. Ez lényegében egy konvolúciós egyenlet annak ellenére, hogy Bode ezt nem mondta ki. Ugyanez az összefüggés igaz egy $\Gamma(\omega)$ átviteli függvényű erősítő erősítésére és fázisára is. Ez nem meglepő, hiszen Γ logaritmus is egy komplex függvény, ahol az erősítés mint valós, a fázis mint képzetes tag jelenik meg:

$$\ln(\Gamma) = \ln |\Gamma| + j \cdot \text{arcus}(\Gamma), \quad (3.20)$$

ismét egy valós rész \leftrightarrow képzetes rész kapcsolattal kerültünk szembe.

A Bode integrálok széles körben használtak az irányítástechnikai rendszerek tervezésében. Visszacsatolt rendszerek stabilitásának vizsgálatakor szükség van a fázishatárok (fázistartalékok) meghatározására, ami (3.19) kiértékelésével elvégezhető. Számos példaalkalmazás található a szakirodalomban, pl. [18, 19, 20].

A valós és képzetes rész kapcsolatát később Solodownikow [21] és mások is vizsgálták. Solodownikow a Hilbert transzformációt használta fel a kapcsolat leírására. Az egyik egyenlete:

$$\text{Im} \{\omega\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re} \{u\}}{u - \omega} du \quad (3.21)$$

ahol u a lineáris frekvencia. Érdekes megfigyelni, hogy ez az összefüggés lényegében egy korrelációs integrál.

Látható, hogy a valós/képzetes rész kapcsolatát több különböző módon is megfogalmazták az elmúlt évtizedekben. Céлом ennek a kapcsolatnak a kifejezése a logaritmusos tartományon konvolúciós alakban. Ezzel a kiegészítéssel kívánom demonstrálni az elosztott RC hálózatok leírására használt konvolúciós hálózatelméleti apparátus kapcsolatát a Bode integrállal.

3.2.1. A képzetes rész számítása

Tegyük fel, hogy a hálózatjellemző függvényünk valós része ismert. (2.64) alkalmazásával számítsuk ki a da/dz időtartománybeli választ:

$$\frac{da}{dz} = -\frac{2}{\pi} W_I'(-\Omega) \otimes \text{Re} \{Z(\Omega)\}. \quad (3.22)$$

Ebből a válaszból a képzetes rész kiszámítható (2.52) alkalmazásával:

$$\text{Im} \{Z(\Omega)\} = W_I(\Omega) \otimes \frac{da}{dz} = W_I(\Omega) \otimes -\frac{2}{\pi} W_I'(-\Omega) \otimes \text{Re} \{Z(\Omega)\}. \quad (3.23)$$

Kihasználva a konvolúció asszociatív tulajdonságát egyesítsük a két operátorfüggvényt:

$$\text{Im} \{Z(\Omega)\} = W_{\text{ReIm}}(\Omega) \otimes \text{Re} \{Z(\Omega)\} \quad (3.24)$$

ahol

$$W_{\text{ReIm}}(\Omega) = -\frac{2}{\pi} W_I(\Omega) \otimes W_I'(-\Omega). \quad (3.25)$$

$W_{\text{ReIm}}(\Omega)$ az operátorfüggvény a **Valós** \rightarrow **Képzetes** transzformációhoz.

Annak érdekében, hogy csak egy operátorfüggvényünk legyen, végezzük el a konvolúciót az előző egyenletben (A egy Ω -hoz hasonló változó):

$$W_{\text{ReIm}}(A) = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\exp(\Omega)) \cdot \exp(\Omega - A) \cdot \cos(\exp(\Omega - A)) d\Omega. \quad (3.26)$$

$W_{\text{ReIm}}(A)$ integrálja felírható, mint

$$\int W_{\text{ReIm}}(A) dA = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\exp(\Omega)) \cdot \sin(\exp(\Omega - A)) d\Omega + \text{konstans} \quad (3.27)$$

A konstans elhagyható, mivel a kifejezést deriválni fogjuk az elkövetkezendő lépések során. Behelyettesítve az $\omega = \exp(\Omega)$ kifejezést:

$$\int W_{\text{ReIm}}(A) dA = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\exp(A)}\right) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (3.28)$$

A megfelelő trigonometrikus összefüggéseket felhasználva:

$$\int W_{\text{ReIm}}(A) dA = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\cos(\omega \cdot (1 - \exp(-A))) - \cos(\omega \cdot (1 + \exp(-A))) \right) \frac{d\omega}{\omega} \quad (3.29)$$

$$\int W_{\text{ReIm}}(A) dA = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \left(\frac{\cos(\omega \cdot (1 - \exp(-A))) - \exp(-\omega)}{\omega} - \frac{\cos(\omega \cdot (1 + \exp(-A))) - \exp(-\omega)}{\omega} \right). \quad (3.30)$$

Felhasználva, hogy

$$f(C) = -\int_0^{\infty} \frac{\cos(x \cdot C) - \exp(-x)}{x} dx = \ln |C| \quad (3.31)$$

(bizonyítás a B.1. függelékben)

$$\begin{aligned} \int W_{\text{ReIm}}(A) dA &= \frac{1}{\pi} \left(\ln \left| (1 + \exp(-A)) \right| - \ln \left| (1 - \exp(-A)) \right| \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1 + \exp(-A)}{1 - \exp(-A)} \right| \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \int W_{\text{ReIm}}(A) dA &= \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\exp(A/2) + \exp(-A/2)}{\exp(A/2) - \exp(-A/2)} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \ln |\text{cth}(A/2)| = \frac{1}{\pi} \ln \text{cth}(|A|/2). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Deriválás után a **Valós** \rightarrow **Képzetes** transzformáció operátorfüggvénye:

$$\boxed{W_{\text{ReIm}}(A) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\text{sh}(A)}}. \quad (3.34)$$

(3.33) egyenletben feltűnt ugyanaz a $\ln \text{cth}(|A|/2)$ függvény, mint amit az eredeti (3.19) Bode integrálban is láttunk.

Első pillantásra ez az eredmény nem tűnik használhatónak, mert az $1/\text{sh}(A)$ függvénynek szakadása van $A = 0$ -nál. Szerencsére továbbra is ki tudjuk integrálni ezt a függvényt Cauchy főérték tételének segítségével [13].

3.2.2. A valós rész számítása

Tegyük fel, hogy a hálózatjellemző függvényünk képzetes része ismert. (2.65) egyenletet felhasználva a da/dz időtartománybeli válasz kiszámítható:

$$\frac{da}{dz} = \frac{2}{\pi} W'_R(-\Omega) \otimes \text{Im} \{Z(\Omega)\}. \quad (3.35)$$

Ebből a válaszból a valós rész kiszámítható (2.51) segítségével:

$$\text{Re} \{Z(\Omega)\} = W_R(\Omega) \otimes \frac{da}{dz} = W_R(\Omega) \otimes \frac{2}{\pi} W'_R(-\Omega) \otimes \text{Im} \{Z(\Omega)\}. \quad (3.36)$$

Most egyesítsük a két operátorfüggvényt, aminek az eredménye

$$\text{Re} \{Z(\Omega)\} = W_{\text{ImRe}}(\Omega) \otimes \text{Im} \{Z(\Omega)\} \quad (3.37)$$

ahol

$$W_{\text{ImRe}}(\Omega) = \frac{2}{\pi} W_R(\Omega) \otimes W'_R(-\Omega). \quad (3.38)$$

$W_{\text{ImRe}}(\Omega)$ a **Képzetes** \rightarrow **Valós** transzformáció operátorfüggvénye.

Ennek levezetésének lépései teljesen analóg módon elvégezhetőek, mint a 3.2.1. részben. Ennek eredménye:

$$\boxed{W_{\text{ImRe}}(A) = \frac{1}{\pi} \frac{\exp(-A)}{\text{sh}(A)}}. \quad (3.39)$$

4. fejezet

Az elosztott RC hálózatelmélet konvolúciós eszközkészletének admittancia alapú megfogalmazása

2. tézis. Az elosztott RC hálózatelmélet konvolúciós eszközkészletének egyes impedancia alapon kidolgozott összefüggéseit admittancia alapúra fogalmaztam át.

2.1. tézis. Definiáltam az időállandó spektrum és az dipólus intenzitás komplex admittancia alapú párját. Levezettem e két jellemző függvény kiszámításának módját. [JN1]

$$G(\zeta = -x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \{ \mathbf{Y}(\mathbf{s} = -\exp(x)) \}$$

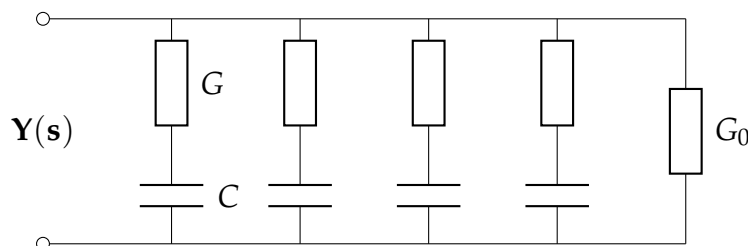
$$\ln(\mathbf{Y}(\mathbf{S})) = \ln(G_0) - \int_{-\infty}^{\infty} -I_{dY}(x) \frac{\exp(\mathbf{S} - x)}{1 + \exp(\mathbf{S} - x)} dx$$

2.2. tézis. A (termikus) tranziens mérések kiértékelésére használt NID módszer az impedancia tartományban működik, ahol a vizsgált rendszer áram egységugrásra adott feszültség válaszát használjuk fel. Kidolgoztam az admittancia alapú komplementer eljárást, ahol feszültség egységugrás áram válasza a számítás kiindulása. [JN1]

$$\frac{di}{dz} = -G(z) \otimes \exp(z - \exp(z))$$

4.1. Az elosztott hálózatleíró függvények kapcsolata a komplex admittanciával

Eddig az $R(\zeta)$ valamint $I_d(\Sigma)$ függvények kapcsolatát tárgyaltam. A teljesség igénye miatt érdemes megemlíteni, hogy ezen függvények $\mathbf{Y}(s)$ egykapu admittancia alapú párja is definiálható.



4.1. ábra. Egy RC egykapu Foster második kanonikus alakja

Egyszerűen előállítható az admittancia alapú leírás Foster második kanonikus alakját felhasználva (4.1. ábra). Egy fokozat admittanciája

$$\mathbf{Y} = \frac{G}{1 + G/sC} = \frac{G}{1 + 1/s\tau}. \quad (4.1)$$

Felhasználva (2.12) és (2.14) logaritmikus változókat,

$$\mathbf{Y} = \frac{G}{1 + \exp(-\mathbf{S} - \zeta)}. \quad (4.2)$$

Feltéve, hogy egy elosztott hálózatnak folytonos időállandó spektruma van

$$\mathbf{Y}(\mathbf{S}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\zeta)}{1 + \exp(-\mathbf{S} - \zeta)} d\zeta. \quad (4.3)$$

Alkalmazzuk (4.3) egyenletet a komplex sík egy olyan vonalán, ami nagyon közel van, de nem esik egybe a negatív valós tengellyel (az integrálási út és a tengely egy φ szöget zár be):

$$\mathbf{s} = -(1 + j\varphi) \exp(\Sigma) \quad (4.4)$$

$$\exp(-\mathbf{S}) = \frac{1}{\mathbf{s}} = \frac{1}{-(1 + j\varphi) \exp(\Sigma)} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{Y}(\Sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(-x)}{1 - \frac{1}{1+j\varphi} \exp(-\Sigma + x)} dx \quad (4.6)$$

$$\mathbf{Y}(x) = G(-x) \otimes \frac{1}{1 - \frac{\exp(-x)}{1+j\varphi}} = G(-x) \otimes \mathbf{W}(x) \quad (4.7)$$

$$\text{Im} \{ \mathbf{W}(x) \} = \frac{-\varphi \exp(x)}{(1 - \exp(x))^2 + \varphi^2 \exp(x)^2} \quad (4.8)$$

[1] bizonyítja, hogy

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Im} \{ \mathbf{W}(x) \} = -\pi \delta(x) \quad (4.9)$$

$$\boxed{G(\zeta = -x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \{ \mathbf{Y}(\mathbf{s} = -\exp(x)) \}} \quad (4.10)$$

A $G(\zeta)$ függvény az admittancia alapú időállandó spektrum.

Következő lépésként (2.40) admittancia alapú párját kell levezetni. $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 1/\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ helyettesítéssel

$$\ln \left(\frac{1}{\mathbf{Y}(\mathbf{S})} \right) = -\ln(\mathbf{Y}(\mathbf{S})) = \ln(R_0) - \int_{-\infty}^{\infty} I_d(x) \frac{\exp(\mathbf{S} - x)}{1 + \exp(\mathbf{S} - x)} dx \quad (4.11)$$

$$\boxed{\ln(\mathbf{Y}(\mathbf{S})) = \ln(G_0) - \int_{-\infty}^{\infty} -I_{dY}(x) \frac{\exp(\mathbf{S} - x)}{1 + \exp(\mathbf{S} - x)} dx} \quad (4.12)$$

ahol I_{dY} a dipólus intenzitás függvény admittanciákra, G_0 a hálózat DC vezetése. Fontos felismerni, hogy $I_{dY} = -I_d$, vagyis az admittancia alapú dipólus intenzitás és az impedancia alapú dipólus intenzitás csak előjelben térnek el.

Az időtartománybeli viselkedés szintén fontos, elengedhetetlen ennek szintén a vizsgálata. (4.3) az inverz Laplace transzformációval alakítható át az időtartománybeli leírásá:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(-x)}{1 + \exp(-x)/\mathbf{s}} dx \quad (4.13)$$

A feszültség gerjesztés legyen $u = \varepsilon(t)$ egységugrás függvény $1/\mathbf{s}$ Laplace transzformálttal. Az áram válasz

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \mathbf{Y}(\mathbf{s}) \cdot \frac{1}{\mathbf{s}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(-x)}{\mathbf{s} + \exp(-x)} dx \quad (4.14)$$

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-x) \cdot \exp(-t/\exp(-x)) dx \quad (4.15)$$

Ezt az egyenletet megvizsgálva kijelenthető, hogy az áram válasz a komponensek exponenciálisan csökkenő válaszainak összessége és G ezen exponensek spektruma.

4.2. RC egykapuk mérése és identifikációja az admittancia tartományban

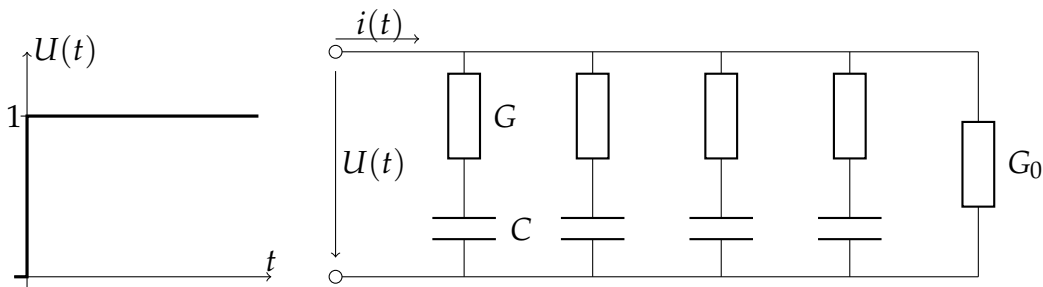
A NID módszer [1] egy dekonvolúció alapú módszer, ami egy széles körben elterjedt identifikációs módszerré vált RC egykapuk vizsgálatára az elmúlt két évtizedben. Ez a módszer az impedancia tartományban működik, a vizsgált hálózat áram egységugrás

gerjesztésre adott feszültség választ használja. A módszer alapegyenlete (2.25), a fizikai mennyiségeket tükröző jelöléssel felírva:

$$\frac{du}{dz} = R(z) \otimes \exp(z - \exp(z)) \quad (4.16)$$

Miután rendelkezésre áll az $u(z)$ mért függvény, egy numerikus deriválás és egy dekonvolúciós lépés után megkapjuk az $R(z)$ időállandó spektrumot [22]. A módszer széles körben elterjedt termikus struktúrák hőáram térképének számításához, mint IC tokok, hűtőbordák, stb. [4]. Ebben az esetben a 2.1. fejezetben is bemutatott termikus-elektromos analógiát használtuk ki. A szokásos megfeleltetésnél a feszültség reprezentálja a hőmérsékletet, az áram a hőfluxust.

A módszer admittancia alapú definiálása egyértelműnek tűnik. Ebben az esetben feszültség gerjesztést alkalmazunk és az áram választ mérjük. Ebben az esetben a GC megfelelőjét kell használnunk a kiindulási RC hálózatunknak, ami párhuzamosan kötött soros kapacitás-vezetés tagokból áll (4.2. ábra).



4.2. ábra. A NID módszer admittancia alapú változata

A hálózat válasza (4.15) felhasználásával felírható:

$$i(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-x) \cdot \exp(-\exp(z+x)) dx \quad (4.17)$$

ahol t -t $\exp(z)$ -vel helyettesítjük. Minkét oldalt z szerint deriválva az eredmény:

$$\frac{di}{dz} = - \int_{-\infty}^{\infty} G(-x) \exp(-\exp(z+x)) \cdot \exp(z+x) dx \quad (4.18)$$

$$\boxed{\frac{di}{dz} = -G(z) \otimes \exp(z - \exp(z))} \quad (4.19)$$

Ha megmérjük a feszültség egységugrásra adott $i(t)$ választ, ki tudjuk számítani a hozzá tartozó $G(z)$ időállandó spektrumot. Az eljárás hasonló a (4.16) egyenlet által meghatározotthoz.

Az előnye ennek az identifikációs módszernek az egyszerűbb mérési elrendezés tisztán elektromos hálózatok vizsgálata esetén. Gyakran egyszerűbb pontos feszültség egységugrást előállítani, mint áram ugrásfüggvényt. Természetesen termikus hálózatok vizsgálatakor ez nem járható út, mivel hőmérsékletugrást rendkívül nehéz megvalósítani termikus RC struktúrákon.

5. fejezet

A konvolúciós eszközkészlet gyakorlati alkalmazásai

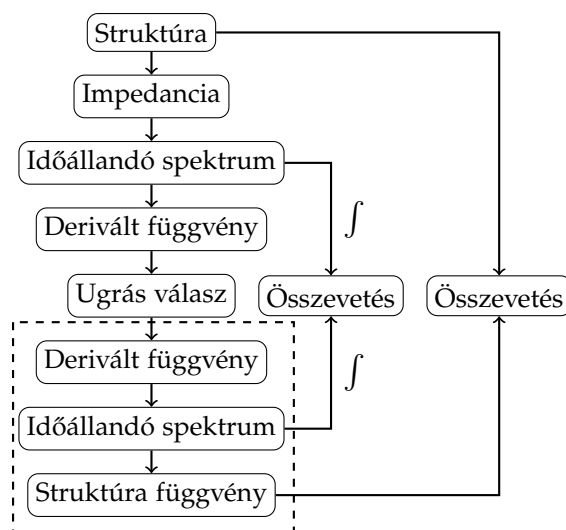
3. tézis. Az elosztott hálózatelmélet konvolúciós eszközkészletét, valamint a NID módszerre épülő mérés technikai eljárást több, gyakorlati szempontból fontos kiegészítéssel láttam el.

3.1. tézis. Eljárást dolgoztam ki az időállandó spektrum rendszeres mérési hibáinak korrekciójára. [C1][J2]

$$K(\tau) = \int_{t_{q0}}^{t_{q1}} (e(x) \otimes w(x)) \cdot \exp(x/\tau) dx$$

$$D(\tau) = \frac{D_m(\tau)}{K(\tau)}$$

3.2. tézis. Verifikációs eljárást dolgoztam ki elosztott RC hálózatok identifikációs algoritmusainak minősítésére. [C2][J3]



5.1. Az időálló spektrum rendszeres mérési hibáinak korrekciója

Termikus karakterizációs problémák esetén az időálló spektrum a termikus ugrás válaszból kerül meghatározásra a NID módszer segítségével [4, 5]. A NID módszer az ideális ugrásfüggvényre adott választ várja. Általános esetben a termikus tranzienst válasz mérésből származik, ami sosem teljesíti ezt a feltételt, foglalkoznunk kell a nem-idealitásokkal. A termikus karakterizációhoz más módszereket is alkalmaznak, mint a *multipoint moment matching* módszer [23], azonban ezeket nem érintem a továbbiakban. A problémakört a NID módszer vizsgálatán keresztül kívánom megvizsgálni.

A nemidealitások fizikai forrásai a következők:

1. a gerjesztés nem pontosan a $t = 0$ időpillanatban* kapcsolódik be,
2. a gerjesztés felfutási ideje véges,
3. a mérőerősítő határfrekvenciája véges,
4. a mért objektum, a hőmérsékletérzékelő és/vagy a mérőerősítő enyhe nemlinearitással rendelkezik.

Szükséges tisztázni ezen korlátozások hatását a termikus tranzienst mérés eredményére azért, hogy

- képünk legyen a mérés eredményeinek pontosságáról,
- a szisztematikus hibákat korrigáljuk.

Ebben a tézispontban a felsorolt négy ok közül az első hárommal foglalkozom. Ezek a lineáris hálózatok elmélete alapján tárgyalhatóak. A negyediket (nemlineáris hatások) egy korábbi szakcikk már feldolgozta [24].

A terület különösen releváns, mivel a termikus tranzienst mérési eljárás szabványban rögzített módszer félvezető hőforrás-tok hőellenállás mérésére [2, 3], ezért a pontosság létfontosságú.

A vizsgálat során az időálló spektrumot tekintem a termikus egykapuk elsődleges leíró függvényének. Minden nemidealitást úgy kezelek, mint az időálló spektrum egy karakterisztikus torzulását.

A számításokban a lineáris időtengelyen értelmezett $D(\tau)$ időálló spektrumot használom (lásd (2.17)). Ez egyértelmű kapcsolatban van a $z = \ln(t)$ logaritmikus időtengelyen értelmezett $R(z)$ spektrummal:

$$R(z) = \exp(z) \cdot D(\tau = \exp(z)). \quad (5.1)$$

Ebből következően a megállapítások az $R(z)$ spektrumra is érvényesek lesznek.

* A $t = 0$ időpont definíciószerűen az az időpont, amit a mért válaszhoz rendelt időskála 0-pontjának tekintünk. Ideális esetben a gerjesztés a $t = 0$ pillanatban belépő egységugrás.

5.1.1. A nemideális gerjesztés hatása

A $D(\tau)$ időállandó spektrummal rendelkező egykapu egységugrás válaszfüggvénye

$$a(t) = \int_0^{\infty} D(\tau) \cdot (1 - \exp(-t/\tau)) d\tau, \quad (5.2)$$

ha $t \geq 0$, különben $a(t) = 0$.

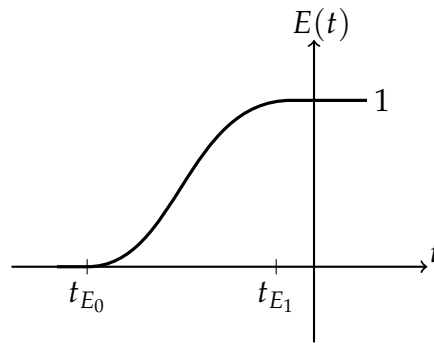
A Dirac- δ válaszfüggvénye ugyanennek az egykapunak

$$s(t) = \frac{da}{dt} = \int_0^{\infty} \frac{D(\tau)}{\tau} \exp(-t/\tau) d\tau, \quad (5.3)$$

ha $t \geq 0$, különben $s(t) = 0$.

A tényleges gerjesztés $E(t)$, ami 0 ha $t < t_{E_0}$, 1 ha $t > t_{E_1}$ (lásd 5.1. ábra). Ennek a függvénynek a deriváltja

$$e(t) = \frac{dE}{dt}. \quad (5.4)$$



5.1. ábra. A nemideális gerjesztés bekapcsolása

A tényleges gerjesztés mellett mérhető $m(t)$ válaszfüggvény konvolúciós integrállal számítható

$$m(t) = e(t) \otimes s(t) = \int_{t_{E_0}}^{t_{E_1}} e(x) \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{D(\tau)}{\tau} \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right) d\tau}_{dx}, \quad (5.5)$$

A megjelölt integrál zérus, ha $t - x < 0$, vagyis $t < x$ (lásd (5.3) egyenlet). Az x szerinti integrálás során ezt a szakaszt el kell kerülni, ha $t > t_{E_1}$. Az $m(t)$ mért függvényre a $(0, \infty]$ idő intervallumban van szükségünk az időállandó spektrum identifikálásához. Ez azt jelenti, hogy t_{E_1} kisebb vagy egyenlő kell legyen zérussal, hogy teljesüljön ez a feltétel. A gerjesztés az 5.1. ábrán teljesíti ezt a feltételt. (5.6)-(5.10) levezetés ezen feltétel teljesülése esetén igaz.

$$m(t) = \int_{t_{E_0}}^{t_{E_1}} \int_0^{\infty} e(x) \cdot \frac{D(\tau)}{\tau} \exp(-t/\tau) \exp(x/\tau) d\tau dx \quad (5.6)$$

(5.6) átcsoportosítható

$$m(t) = \int_0^{\infty} \frac{D(\tau)}{\tau} \int_{t_{E_0}}^{t_{E_1}} e(x) \cdot \exp(x/\tau) dx \exp(-t/\tau) d\tau \quad (5.7)$$

Tehát a D_m mért spektrum[†]

$$D_m(\tau) = D(\tau) \int_{t_{E_0}}^{t_{E_1}} e(x) \cdot \exp(x/\tau) dx = D(\tau) \cdot K(\tau), \quad (5.8)$$

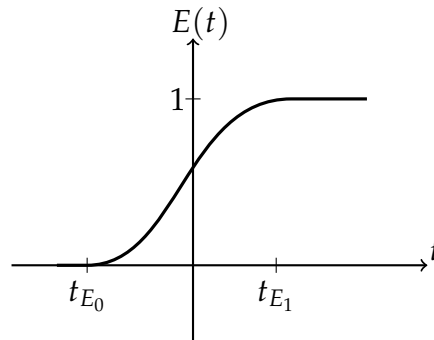
ahol

$$K(\tau) = \int_{t_{E_0}}^{t_{E_1}} e(x) \cdot \exp(x/\tau) dx. \quad (5.9)$$

$K(\tau)$ egy korrekciós függvény, ami a gerjesztés karakterisztikájának ismeretében számítható. Ennek a függvénynek a birtokában a mért időállandó spektrumon bevezethető a korrekció:

$$D(\tau) = \frac{D_m(\tau)}{K(\tau)}. \quad (5.10)$$

Még meg kell oldani a $t_{E_1} > 0$ helyzet kezelését (5.2. ábra).



5.2. ábra. A $t_{E_1} > 0$ eset

Az (5.5) kifejezés a $t_{E_0} < t < t_{E_1}$ tartományban felírható:

$$m(t) = e(t) \otimes s(t) = \int_{t_{E_0}}^t e(x) \cdot \int_0^{\infty} \frac{D(\tau)}{\tau} \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right) d\tau dx \quad (5.11)$$

Átrendezések után:

$$D_m(\tau) = D(\tau) \int_{t_{E_0}}^t e(x) \cdot \exp(x/\tau) dx = D(\tau) \cdot K(\tau, t) \quad (5.12)$$

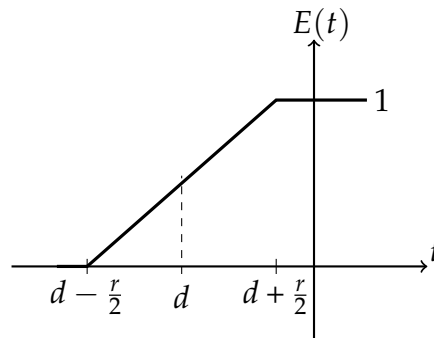
[†] Precízebben fogalmazva: az a spektrum, ami a mért $m(t)$ válaszhoz tartozik, és ideális esetben abból számolni lehet.

Mivel K csak az idő függvénye, a mért választ egy tisztán idővariáns hálózattal lehet azonosítani. Ez nyilvánvalóan nem igaz a mi esetünkben. A $K(\tau)$ -val való spektrum korrekció jelen esetben nem értelmezhető.

A fentiek alapján, ha szeretnénk egyszerű hibakorrekciós módszernek használni az (5.10) összefüggést, teljesítenünk kell a $t_{E_1} < 0$ feltételt a mérés során. Ezek szerint praktikus tartani egy meghatározott *korai bekapcsolási időt* a gerjesztéshez.

5.1.2. Példa: törtvonal közelítésű gerjesztés

A következő példában tegyük fel, hogy a gerjesztésünk az 5.3. ábrán látható.



5.3. ábra. A gerjesztés törtvonalas közelítése

A gerjesztés deriváltja:

$$e(t) = \frac{1}{r} \quad \text{ha} \quad d - \frac{r}{2} < t < d + \frac{r}{2}. \quad (5.13)$$

A korrekciós függvény a következő módon határozható meg:

$$K(\tau) = \frac{1}{r} \int_{d-\frac{r}{2}}^{d+\frac{r}{2}} \exp(x/\tau) dx = \frac{\tau}{r} \exp(x/\tau) \Big|_{d-\frac{r}{2}}^{d+\frac{r}{2}}$$

$$K(\tau) = \frac{2\tau}{r} \exp(d/\tau) \frac{\exp(r/2\tau) - \exp(-r/2\tau)}{2}$$

$$K(\tau) = \exp(d/\tau) \frac{\text{sh}(r/2\tau)}{r/2\tau} \quad (5.14)$$

Ha például a felfutási idő $r = 1 \mu\text{s}$ és az átlagos *korai bekapcsolási idő* $d = -2 \mu\text{s}$, akkor a $\tau = 5 \mu\text{s}$ időállandó hibája 33% és a $\tau = 10 \mu\text{s}$ -nak 18% (korrekció nélkül). A hiba a kis időállandóknál szignifikáns és a nagy időállandók tartományához érve eltűnik.

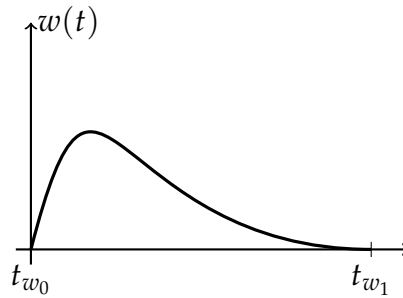
Természetesen előnyös, ha a *korai bekapcsolási idő* annyira kicsi amennyire lehet. Határesetben $t_{E_1} = 0$, $-d = r/2$ és

$$K(\tau) = \frac{\tau}{r} (1 - \exp(-r/\tau)). \quad (5.15)$$

Ebben az esetben a hiba a $\tau = 5 \mu\text{s}$ időállandóra kevesebb, mint 10%, több mint háromszor kisebb, mint a $d = -2 \mu\text{s}$ esetben.

5.1.3. A véges sávzélességű mérőerősítő hatása

A következő vizsgálat során a mérőerősítőt lineárisnak tekintem. Az erősítő dinamikus viselkedését a $w(t)$ súlyfüggvénye adja meg. Legyen ez a súlyfüggvény véges hosszúságú az 5.4. ábrán látható módon, és $w(t)$ legyen nemnegatív. A függvény határai legyenek $t_{w_0} < t < t_{w_1}$.



5.4. ábra. Az erősítő súlyfüggvénye

A vizsgált egykapu gerjesztését tekintjük ideálisnak. Ez azt jelenti, hogy az erősítő bemenetét a vizsgált egykapu Dirac- δ -ra adott $s(t)$ válaszfüggvénye gerjeszti. Az erősítő $n(t)$ kimeneti jele meghatározható a következő konvolúcióval:

$$n(t) = w(t) \otimes s(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < t_{w_0} \\ \int_{t_{w_0}}^t w(x) \cdot \int_0^{\infty} \frac{D(\tau)}{\tau} \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right) d\tau dx & \text{ha } t_{w_0} < t < t_{w_1} \\ \int_{t_{w_0}}^{t_{w_1}} w(x) \cdot \int_0^{\infty} \frac{D(\tau)}{\tau} \exp\left(-\frac{t-x}{\tau}\right) d\tau dx & \text{ha } t > t_{w_1} \end{cases} \quad (5.16)$$

Az (5.8) és (5.12) levezetéséhez használt matematikai lépésekhez hasonló módon, a mért $D_n(\tau)$ időállandó spektrum:

$$D_n(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < t_{w_0} \\ D(\tau) \int_{t_{w_0}}^t w(x) \cdot \exp(x/\tau) dx & \text{ha } t_{w_0} < t < t_{w_1} \\ D(\tau) \int_{t_{w_0}}^{t_{w_1}} w(x) \cdot \exp(x/\tau) dx & \text{ha } t > t_{w_1} \end{cases} \quad (5.17)$$

ahol $D(\tau)$ az ideális időállandó spektrum az (5.1) egyenlet alapján. Az (5.17) integrál része a tényleges hiba függvény.

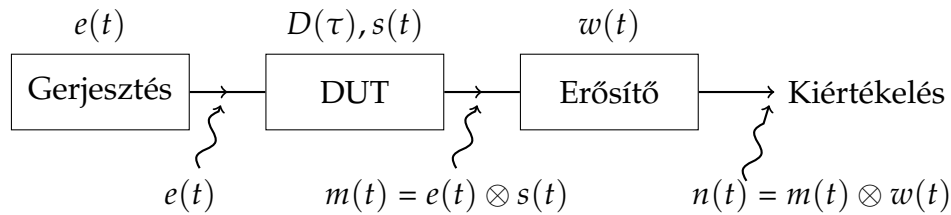
Megállapítható, hogy ha az $n(t)$ függvényt ideális Dirac- δ gerjesztés válaszának tekintjük, akkor az erősítő után $t < t_{w_1}$ esetén időinvariáns hálózatra jutunk. Ezzel ellentétben, ha $t > t_{w_1}$ válaszfüggvényt dolgozunk fel, az korrekt, és korrigálható a következő

függvénnyel:

$$K(\tau) = \int_{t_{w_0}}^{t_{w_1}} w(x) \cdot \exp(x/\tau) dx \quad (5.18)$$

5.1.4. A nemideális gerjesztés és a véges határfrekvencia együttes kezelése

Az 5.5. ábrán látható blokkvázlaton látható a mérési elrendezés. Minden blokk a saját Dirac- δ -ra adott $e(t)$, $s(t)$ és $w(t)$ válaszával jellemezhető. Az elrendezés teljes viselkedé-



5.5. ábra. A teljes mérési elrendezés blokkvázlata

se az alábbi konvolúciós egyenlettel írható le:

$$n(t) = m(t) \otimes w(t) = e(t) \otimes s(t) \otimes w(t) = s(t) \otimes (e(t) \otimes w(t)) = s(t) \otimes q(t) \quad (5.19)$$

ahol a konvolúció kommutatív és asszociatív tulajdonságát is kihasználtuk. Ez azt jelenti, hogy a nemideális gerjesztés és az erősítő véges vágási frekvenciája egyszerűen leírható az eredményül kapott $q(t) = e(t) \otimes w(t)$ függvénnyel. Ez a tény lehetővé teszi a $q(t)$ függvény eltolását a $t < 0$ régióba, megfelelő *korai bekapcsolási idejű* gerjesztéssel.

Ilyen módon a teljes válaszfüggvény elméletileg tökéletes korrekcióját végezhetjük el. A korrekciós függvény

$$K(\tau) = \int_{t_{q_0}}^{t_{q_1}} (e(x) \otimes w(x)) \cdot \exp(x/\tau) dx \quad (5.20)$$

ahol $t_{q_0} = t_{E_0} + t_{w_0}$, $t_{q_1} = t_{E_1} + t_{w_1}$ és $t_{q_1} < 0$.

5.1.5. Példa: a nemidealitások együttes kezelése

A következő példában ugyanazt a törtvonalas gerjesztést használom, mint az előző példában az 5.1.2. fejezetben.

Tegyük fel, hogy az általunk mérésre használt erősítő $\sin x/x$ jellegű frekvencia karakterisztikával rendelkezik. Ebben az esetben az időtartományban egy ablakfüggvényt kapunk. A példánkban a

$$w(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T) \quad (5.21)$$

függvényt használjuk, ahol ε az egységugrás függvény és T az ablakszélesség paramétere, ami egyértelmű összefüggésben van az erősítő sávszélességével.

Az (5.20) korrekciós függvény kiszámításához ki kell számolnunk a $q(t) = e(t) \otimes w(t)$ függvényt:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < -d + \frac{r}{2} \\ \frac{1}{rT} \left(x + d + \frac{r}{2} \right) & \text{ha } t < -d + \frac{r}{2} \\ \frac{1}{T} & \text{ha } t < -d - \frac{r}{2} + T \\ \frac{1}{T} + \frac{1}{rT} \left(-x - d - \frac{r}{2} + T \right) & \text{ha } t < -d + \frac{r}{2} + T \\ 0 & \text{ha } -d + \frac{r}{2} + T < t \end{cases} \quad (5.22)$$

Az (5.20) és (5.22) egyenletek felhasználásával a korrekciós függvény

$$K(\tau) = \frac{\tau^2 (\exp(r/\tau) - 1) (\exp(T/\tau) - 1) \exp\left(-\frac{2d+r}{2\tau}\right)}{rT}, \quad (5.23)$$

ha $r < T$ és $T > 0$.

Például az átlagos *korai bekapcsolási idő* $d = 2 \mu\text{s}$, a felfutási idő $r = 1 \mu\text{s}$ és az ablakfüggvény szélessége $T = 1.1 \mu\text{s}$, a különböző időállandókhöz tartozó hibák (kompenzálás nélkül) az 5.1. táblázatban láthatóak.

$\tau [\mu\text{s}]$	1	10	100	1000
Hiba	74.3 %	13.4 %	1 %	0.01 %

5.1. táblázat. Az egyes időállandókhöz tartozó hibák

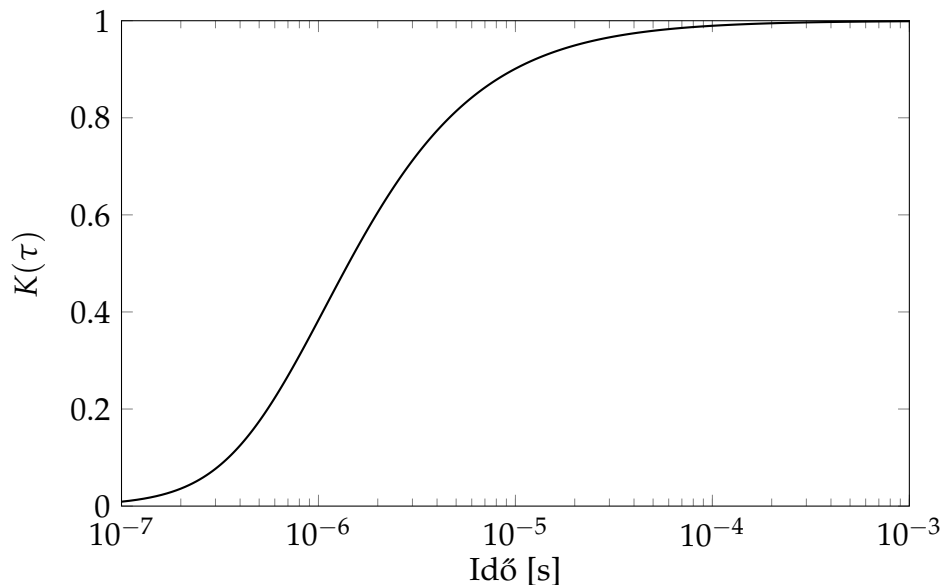
Természetesen ebben az esetben is előnyös lenne annyira rövid *korai bekapcsolási időt* használni, amennyire lehet. Ennek a határhelyzete $t_{q1} = 0$, $-d = r/2 + T$, és ekkor a korrekciós függvény:

$$K(\tau) = \frac{\tau^2 (\exp(r/\tau) - 1) (\exp(T/\tau) - 1) \exp\left(-\frac{r+T}{\tau}\right)}{rT} \quad (5.24)$$

Ebben az esetben a korrekciós függvény $T = 1.1 \mu\text{s}$ paraméterrel látható az 5.6. ábrán.

5.2. RC hálózatok identifikációs algoritmusainak minősítése

Az RC hálózatok identifikációs módszerei különösen fontos szerephez jutottak az elmúlt két évtizedben. Az integrált áramkörök termikus vizsgálata során elsődleges céllá



5.6. ábra. A $K(\tau)$ korrekciós függvény optimális *korai bekapcsolási idő* esetén ($T = 1.1 \mu\text{s}$, $d = 2 \mu\text{s}$, $r = 1 \mu\text{s}$)

vált a pontos és megbízható termikus kompakt modellek előállítása. A bevezetőben is bemutatott a termikus és elektromos rendszerek közötti analógia alapján nem nehéz belátni, hogy végső soron egy ekvivalens RC hálózat identifikációjára vezethető vissza a probléma. Az iparági szereplők és az általuk alkotott szabványügyi bizottságok is ezen út mentén dolgozták ki a kapcsolódó standard mérési eljárásokat. Munkám egyik indikátora volt, hogy a JEDEC[†] bizottság az integrált áramköri tokok hőforrás-tok hőút hőellenállásának mérésére a termikus tranziens mérést állapította meg, mint szabványos eljárást [26, 27, 28]. A mérés során a vizsgált integrált áramkörre teljesítmény egységugrást adva regisztrálják a hőmérséklet emelkedését a hőforrás helyén. Az eredményül kapott görbe még nem tartalmazza közvetlenül a vizsgált struktúra alkalmas modellét, azt megfelelő feldolgozó algoritmussal kell előállítani.

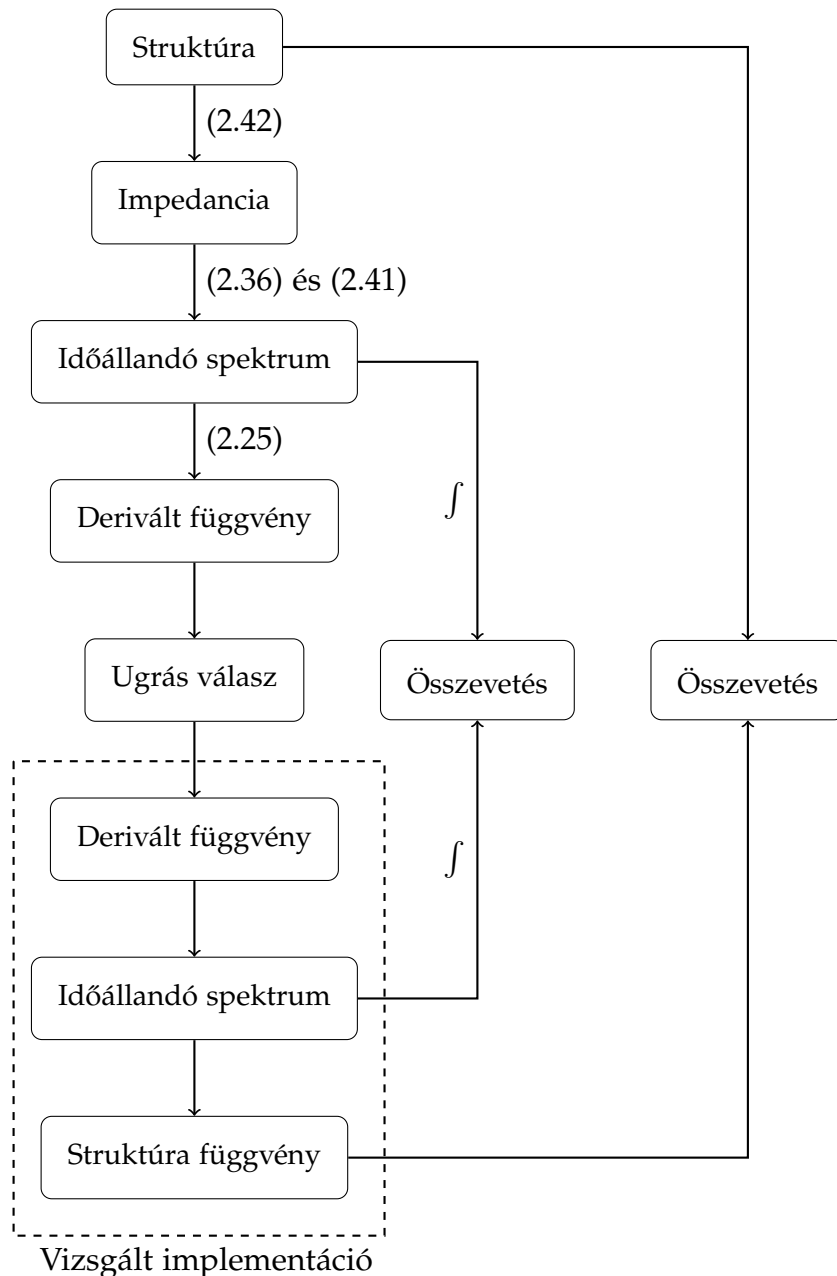
A szabványban nincs rögzítve ez a kiértékelő algoritmus. Matematikailag sokféle módon el lehet jutni a megoldáshoz, és erre több módszert is kidolgoztak [23, 29, 30, 31, 32]. Mivel bárki használhat tetszőleges eszközt, algoritmust, ezért nincs garancia arra, hogy az adott implementáció pontossága elfogadható-e. Abban az esetben, ha ez az egyéni eljárás pontatlan, akkor a szabványosítási törekvés ellenére is pontatlan – szélsőséges esetben teljesen hamis – hőellenállás adatokat közölhetnek a gyártók az áramkör adatlapján.

Ennek megelőzésére egy olyan eljárást dolgoztam ki, amivel a méréstől függetlenül vizsgálható és minősíthető az identifikációs módszer. A kidolgozott új eljáráshoz a NID módszer vizsgálatán keresztül jutottam el.

[†]Joint Electron Devices Engineering Council, a legjelentősebb félvezető iparági cégek részvételével létrehozott egyesület, ami az iparág nyílt szabványainak vezető kidolgozója. Működtetésében több mint 300 cég vesz részt [25].

5.2.1. Az eljárás menete

Az eljáráshoz szükségünk van egy analitikus pontosságú időállandó spektrumra valamint struktúra függvényre. Az eljárás folyamatábrája az 5.7. ábrán látható.



5.7. ábra. A verifikációs eljárás folyamatábrája

Első lépésként definiálnunk kell egy referencia struktúrát, ahol minden szükséges változót ismerünk, így meghatározható annak az analitikus időállandó spektruma és struktúra függvénye. Praktikus okokból egy többretegű struktúrát definiáltam, ahol több, mint egy szignifikáns időállandó komponensünk van. A referencia struktúra (egy teljesítmény MOS) modellje látható az 5.8. ábrán. A $Z(s)$ impedancia könnyen meghatározható a távíró egyenletek segítségével. A referencia struktúra minden eleme egy elosztott

Rétegek	Első	Második	Harmadik	Negyedik	Ötödik
r [K/W/m]	1000	1000	1000	1000	1000
c [J/K/m]	1e-3	1e-2	1e-3	1e-2	1e-3
L [m]	1e-2	1e-2	1e-2	1e-2	1e-2

5.2. táblázat. A referencia modell paraméterei

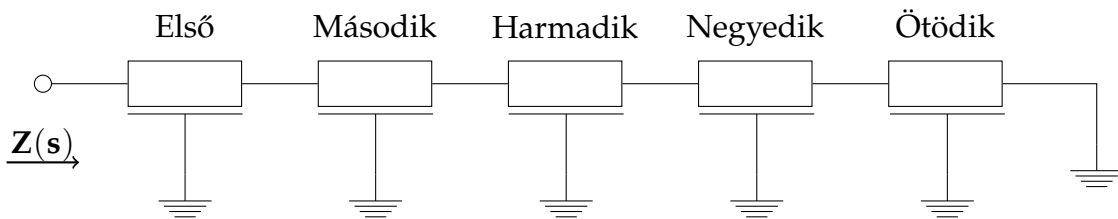
RC vonal Z_t lezárással. Egy RC vonal Z_{in} bemeneti impedanciája a

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_t \operatorname{ch} \gamma L + Z_0 \operatorname{sh} \gamma L}{Z_t \operatorname{sh} \gamma L + Z_0 \operatorname{ch} \gamma L} \quad (5.25)$$

egyenlettel számítható, ahol

$$\gamma = \sqrt{sr}c \quad Z_0 = \sqrt{\frac{r}{sc}} \quad (5.26)$$

és r, c az anyag hosszegységre eső termikus ellenállása és kapacitása, valamint L az RC vonal hossza.



5.8. ábra. A referencia struktúra egy teljesítmény MOS modellje

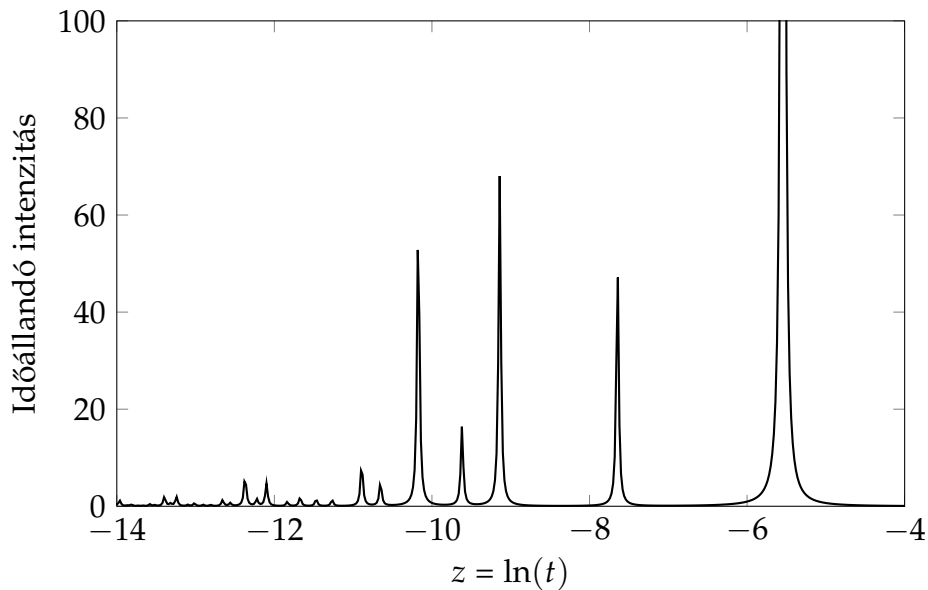
Az (5.25) egyenlet és az anyagparaméterek (5.2. táblázat) alkalmazásával a modell utolsó tagjától az elsőig haladva minden lépésben az előző számítás eredményének bemeneti impedanciáját a következő lezárójának helyettesítve meghatározható a teljes struktúra $Z(s)$ bemeneti impedanciája. Felhasználva a kapott eredményt, valamint (2.36) és (2.41) összefüggéseket, meghatározhatjuk a referencia struktúra időállandó spektrumát (5.9. ábra).

A (2.25) egyenlet alkalmazásával egy egyszerű konvolúcióval ki tudjuk számítani az egységugrás gerjesztésre adott válasz d/dz deriváltját. Végül integrálva a d/dz függvényt meghatározható a referencia struktúra analitikus ugrásválasza.

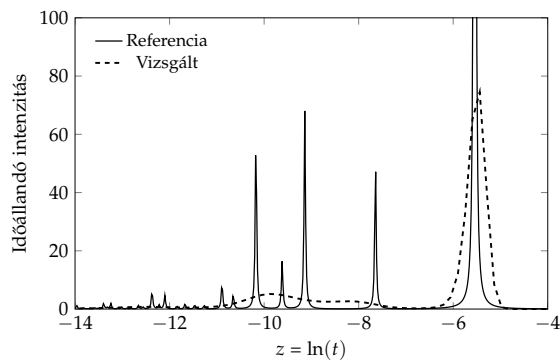
Ezek után ezt az ugrásválaszt használjuk a vizsgált NID implementáció bemenetének (szaggatottal bekeretezett rész az 5.7. ábrán), mint egy analitikus pontosságú termikus tranziens mérést.

5.2.2. Időtartománybeli összehasonlítás

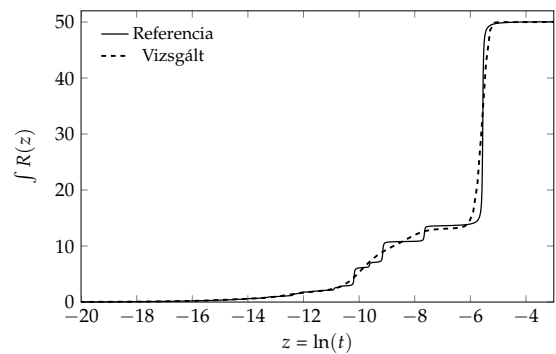
Egy NID implementáció első fontos eredménye az időállandó spektrum. Ez a függvény valamennyi szükséges információt tartalmaz a vizsgált struktúráról.



5.9. ábra. A referencia struktúra időálló spektruma



(a) Időálló spektrumok

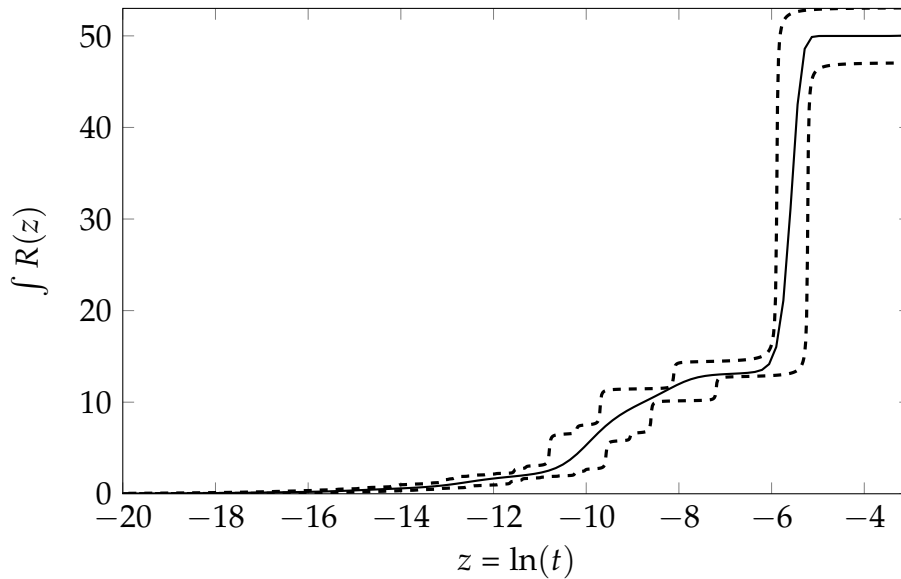


(b) Az időálló spektrumok integrálfüggvényei

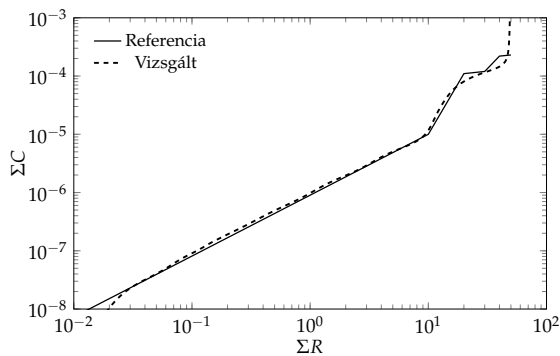
5.10. ábra. Időálló spektrumok összehasonlítása

Az 5.10. a) ábrán látható az analitikus referencia időálló spektrum és a NID implementáció által számított. Ezen ábra alapján még nem tudunk semmi konkrétumot megállapítani az implementáció minőségével kapcsolatban. A függvények alatti területek megegyeznek, vagyis a teljes hőellenállás megegyezik. A domináns időállóak pozíciói szintén azonos helyen vannak, de a kis intenzitású időállóak elkenődtek. A két időálló spektrum *integrálját* összevetve már jobban látható a számítás minősége, és a függvények egyszerűbben összehasonlíthatóak (5.10. b) ábra).

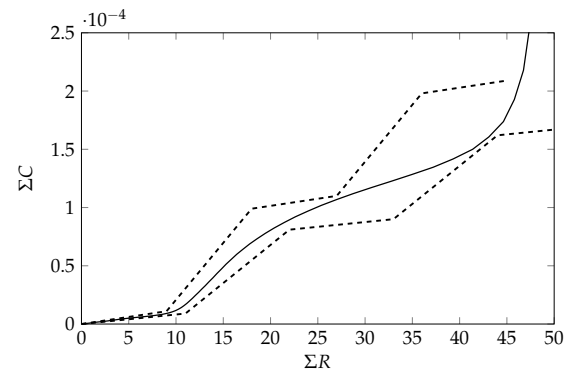
Ezt az ábrát megvizsgálva jól látható, hogy a vizsgált NID implementáció egy valóban pontos számítást eredményez, valamint ez az ábra alkalmas tolerancia séma kialakítására is, mint ami az 5.11. ábrán is látható (részletesen az 5.2.4. részben fogom tárgyalni a séma kialakítását). Ezen az ábrán a tolerancia sáv szélessége 6 %.



5.11. ábra. Az integrálfüggvényeken alapuló tolerancia séma



(a) A struktúrafüggvények direkt összehasonlítása



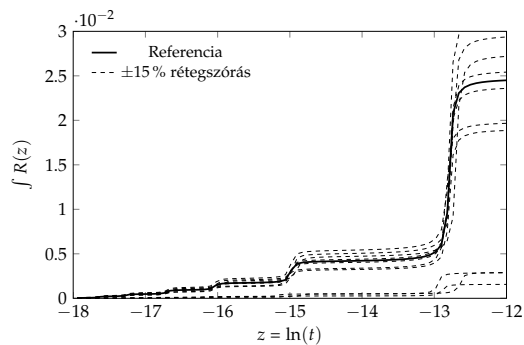
(b) A struktúrafüggvényen alapuló tolerancia séma

5.12. ábra. A struktúra függvények összehasonlítása

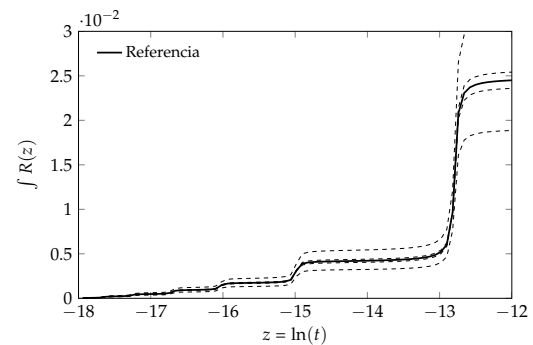
5.2.3. Direkt struktúra függvény összehasonlítás

A termikus tranziens mérés kiértékelésének a végeredménye a struktúrafüggvény, magától értetőnek tűnik ezen függvények közvetlen összehasonlítása.

Az 5.12. a) ábrán az 5.10. b) ábrához hasonló módon a számított, a referenciát közelítő elkent görbe. Ez az ábra szintén felhasználható tolerancia séma kialakítására. Mivel az időállandó spektrum időállandó pozíciói és a struktúrafüggvény kumulatív ellenállás és kapacitás pozíciói között exponenciális összefüggés van, ezért az ekvivalens tolerancia sávnak szélesebbnek kell lenni, mint az integrális időállandó spektrum esetén. Az 5.12. b) ábrán látható a tolerancia sáv. Ebben az esetben a tolerancia 15%.



(a) Az 1D teljesítmény MOS modell különböző rétegeinek $\pm 15\%$ vastagság szórása az integrális időállandó spektrumon



(b) A domináns rétegek megengedett vastagság szórása az integrális időállandó spektrumon

5.13. ábra. Az 1D teljesítmény MOS rétegvastagság szórásai

5.2.4. A struktúra gyártási szórása

Amennyiben szeretnénk megállapítani, hogy egy NID implementációnak mennyire *kell* pontosnak lennie (mennyire kell szigorú tolerancia sávot meghatározni), figyelembe kell vennünk néhány gyakorlati szempontot. A termikus tranziens kiértékelés fő felhasználási területe az integrált áramköri tokok hőforrás-tok termikus ellenállás karakterizálása [5]. Figyelembe kell vennünk a tokozáskor alkalmazott gyártási technológia pontatlanságait.

Példaként vizsgáljuk meg az 5.8. ábrán látható teljesítmény MOS tok modellt. Ez az egyszerűsített 1D tokmodell termikus szempontból földelt (cold-plate-el van kontaktálva), a rétegek a disszipációs ponttól a termikus földig: a chip, chip rögzítés (die attach), kivezető keret (lead-frame), TIM[§] anyag és a termikus föld (cold-plate) [33].

A gyártási devianciák szimulációjához egy Monte-Carlo jellegű analízist használtam, ahol valamennyi fő paraméter egy tartományon belüli szórással rendelkezett. A $\pm 15\%$ rétegvastagság szórás eredménye látható az 5.13. a) ábrán.

Természetesen további megfontolásokra is szükségünk van, az 5.13. a) ábra még nem ad elegendő támpontot. A tokozási gyártástechnológiák során a különböző rétegek különböző gyártási szórással és karakterisztikus hibával terheltek, az egymáshoz viszonyított arányuk eltérő. Jelen példában a legkritikusabb réteg a chip rögzítő valamint a TIM anyag, mivel ezen rétegek r fajlagos hőellenállása lényegesen nagyobb, mint a többi felhasznált anyagé. Ezeknek a rétegeknek a technológiai szórása is magasabb, mint a többi rétegé, vagyis az itt bekövetkező változások hatása sokkal drámaibb változásokat eredményez a teljes R_{th} , C_{th} értékben.

Ha a vizsgált algoritmusunkat hibadetektálásra kívánjuk használni, akkor az elvárt tolerancia sávnak infinitezimálisan közel kell lenni a megengedhető gyártási szórásokhoz. A megengedhető szórások nem okoznak hibát, továbbra is a normális működési tartományban vagyunk. Ha az eltérés ettől nagyobb, akkor már szignifikáns hibával állunk szemben. Jelen példában a domináns rétegeknél megengedett „hossz” diszperzió burkolóját kell képeznünk az optimális tolerancia sávhoz (5.13. b) ábra).

[§] termikus interface anyag (Thermal Interface Material)

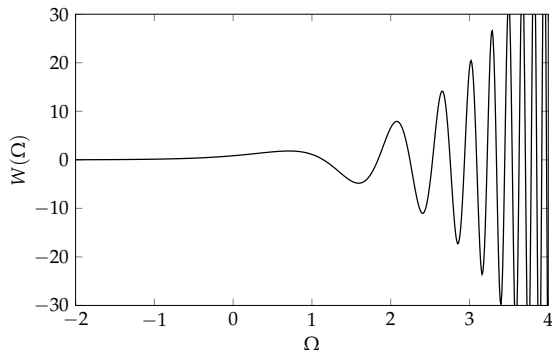
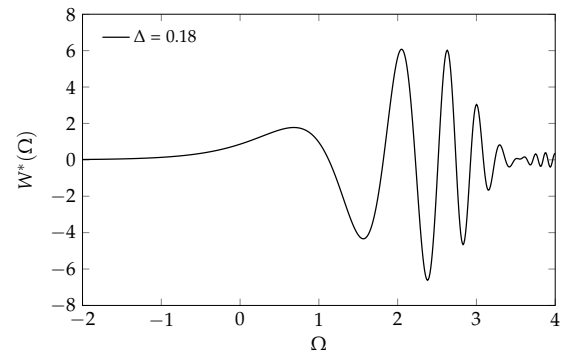
6. fejezet

Divergáló operátorfüggvények regularizációja

4. tézis. A [15] publikáció egyes konvolúciós műveletekre (pl. az időtartomány és a frekvenciatartomány közötti transzformációkra) divergáló operátorfüggvényeket vezet le. Ezen operátorfüggvényeket úgy teszi mégis használhatóvá, hogy egy impulzusfüggvénnyel történő konvolúcióval regularizálja azokat.

Megállapítottam, hogy az impulzusfüggvény félértékszélesség paraméterével a felbontás romlása közel egyenesen, a jel-zaj viszony változása fordítottan arányos. [J1]

$$\text{SNR}_A = \text{SNR}_B \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} W(\Omega) d\Omega \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\vartheta) W(\theta) r_B(\theta - \vartheta) d\theta d\vartheta}$$

(a) A $W(\Omega) = \exp(\Omega) \cdot \sin(\exp(\Omega))$ függvény(b) A $W^*(\Omega)$ függvény

6.1. ábra. Egy divergáló operátorfüggvény, és annak regularizációja

6.1. A frekvenciatartomány \leftrightarrow időtartomány irányú transzformációk gyakorlati problémái

A különböző tartományok közötti transzformációt biztosító súlyfüggvények egyik kellemetlen tulajdonsága a divergens viselkedésük, ami nyilvánvalóan matematikai nehézségeket okoz. Az olyan függvények, mint (2.61) vagy (2.62) exponenciálisan növekednek és egyre sűrűbb oszcillációt mutatnak az $\Omega \rightarrow \infty$ tartományon (lásd 6.1. a) ábra).

A [15] publikáció javaslata a probléma megoldására: használjunk egy alkalmasan módosított $W^*(\Omega)$ súlyfüggvényt az eredeti divergáló $W(\Omega)$ függvény helyett. A bevezetett problémás $W(\Omega)$ függvények mindig a következő alakú konvolúciós egyenletekben szerepelnek:

$$A(\Omega) = W(\Omega) \otimes B(\Omega). \quad (6.1)$$

Konvolváljuk ezt az egyenletet egy további $E(\Omega)$ függvénnyel. Legyen ez a függvény egy egységnyi területű keskeny impulzus.

$$E(\Omega) \otimes A(\Omega) = E(\Omega) \otimes W(\Omega) \otimes B(\Omega) = W^*(\Omega) \otimes B(\Omega) \quad (6.2)$$

Ha a $E(\Omega) \otimes A(\Omega)$ összefüggést tekintjük (6.1) tökéletes megoldásának, akkor természetesen bevezetünk egy jól meghatározott hibát. Ez a hiba jól karakterizált és egy megengedhető határ alatt tartható. A hiba az $A(\Omega)$ felbontásromlásában mutatkozik meg, ami szorosan összefügg az $E(\Omega)$ impulzus szélességével. Az egyenlet jobb oldalán a módosított $W^*(\Omega) = E(\Omega) \otimes W(\Omega)$ súlyfüggvényt használjuk az eredeti helyett. Ha $E(\Omega)$ -t megfelelően választjuk meg, akkor a módosított súlyfüggvény sokkal jobban fog viselkedni, mint az eredeti $W(\Omega)$. A B.2. függelék olyan alkalmas $E(\Omega)$ függvényeket mutat be, melyek félértékszélessége paraméterezhető (gyakorlatilag a felbontásvesztés). Ezek a függvények garantálják, hogy a módosított súlyfüggvény zérushoz tartson, ha $\Omega \rightarrow \pm\infty$ és analitikusan kifejezhető a konvolúciójuk a (2.61) és (2.62) típusú súlyfüggvényekkel (lásd 6.1. b) ábra). A megfelelő $E(\Omega)$ függvények kifejezése a B.3. függelékben található meg.

Célom a regularizáló függvények operátorfüggvények zajérzékenységre gyakorolt hatásának meghatározása. Ennek ismeretében lehetővé válik a regularizáló függvények félértékszélességének optimalizálása.

6.2. Zajérzékenység

Az előző pontban bemutatott művelet pontossági szempontból történő karakterizálásához azzal a feltételezéssel élünk, hogy a művelet lineáris rendszerként tárgyalható, hasonló módon (6.1) egyenlethez, ahol $A(\Omega)$ a rendszer válasza, $B(\Omega)$ a gerjesztés és $W(\Omega)$ a rendszer súlyfüggvénye.

Tegyük fel, hogy $B(\Omega)$ mérésből származik. Pl. $B(\Omega)$ legyen az Ω logaritmusos frekvencia függvényében mért komplex impedancia függvény valós része. Természetesen a mért függvény valamennyi pontja mérési hibával terhelt, más szóval, $B(\Omega)$ -nak van egy véletlen komponense amit *zajnak* tekintünk. A véletlen komponensek kvantitatív jellemzésére definiálható egy jel-zaj viszony SNR_B . Az egymást követő mérési minták korreláltak lehetnek, ami a mérési bizonytalanság autokorrelációs függvényével jellemezhető.

$B(\Omega)$ függvényt $W(\Omega)$ -val konvolválva azt várjuk, hogy SNR romlani fog, mivel a járulékos zajkomponensek az amplitudójuk négyzetével arányosak. Ebből az következik, hogy $W^*(\Omega)$ negatív komponensei növelni fogják a teljes zajt, de csökkentik a jelamplitudót.

A részletes vizsgálathoz szükségünk van a normált autokorrelációs függvény, $r(\cdot)$ definíciójára:

$$R(\Omega) = \overline{u^2} \cdot r(\Omega). \quad (6.3)$$

$r(0) = 1$ aszimptotikusan stabil rendszerekre.

Lineáris rendszerek kimeneti korrelációs függvénye [34, 35] alapján:

$$R_A(\Omega) = \overline{u_B^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\vartheta)W(\theta)r_B(\Omega - \theta + \vartheta)d\theta d\vartheta, \quad (6.4)$$

$$\overline{u_A^2} = R_A(0). \quad (6.5)$$

A zaj kifejezhető, mint

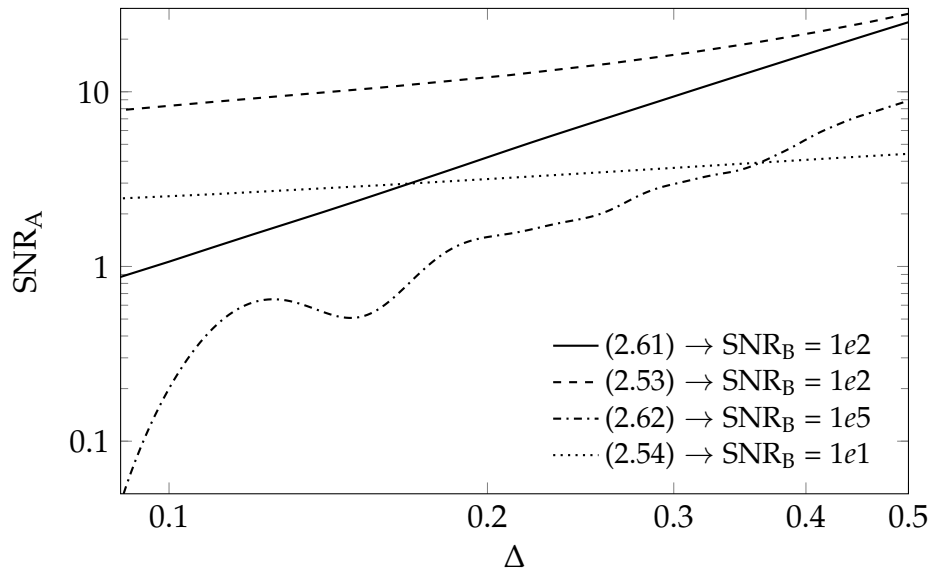
$$\overline{u_A^2} = \overline{u_B^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\vartheta)W(\theta)r_B(\theta - \vartheta)d\theta d\vartheta \quad (6.6)$$

Definiáljuk a hasznos jel amplitudóját, mint az egységugrásra adott válasz állandósult állapotbeli értékét:

$$A(t \rightarrow \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau)d\tau. \quad (6.7)$$

A jel-zaj viszony a rendszer kimenetén:

$$\text{SNR}_A = \text{SNR}_B \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} W(\Omega)d\Omega \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\vartheta)W(\theta)r_B(\theta - \vartheta)d\theta d\vartheta} \quad (6.8)$$



6.2. ábra. (6.8) numerikus eredménye $W^*(\Omega)$ -ra $r_B(\vartheta \neq 0) = 0$ esetén, ha $W(\Omega) = (2.61)$, (2.53), (2.62) illetve (2.54)

(6.8) analitikus kiértékelése bonyolult $W(\Omega)$ függvények esetén nehézségekbe ütközhet. (6.8)-ba $W^*(\Omega)$ -t helyettesítve a numerikus eredmények a Δ paraméter függvényében ábrázolhatóak. Az $E(\Omega)$ függvény (6.1) szerint felbontásromlást okoz az $A(\Omega)$ függvényen az Ω tengely mentén. Praktikus lenne olyan kis Δ -t választani amennyire lehet, de a 6.2. ábra alapján nyilvánvaló, hogy csökkenő Δ értékek a jel-zaj viszony romlását okozzák, így egy felbontás/zaj kompromisszum előtt állunk.

7. fejezet

Összefoglalás

Értekezésemben az elosztott RC hálózatok elméletét láttam el elméleti és gyakorlati jelentőségű kiegészítésekkel. A bemutatott módszerek segítségével a hálózatleíró függvények mélyebb kapcsolata deríthető fel, a területen alkalmazott mérés technikai eljárások rendszeres hibái korrigálhatóak, azok kiértékelő algoritmusai minősíthetőek.

Első téziscsoportom eredményeivel a hálózatidentifikációs eljárások egészíthetőek ki. A kiegészítéseknek köszönhetően az identifikáció során, ha az időállandó spektrumot vagy a dipólus intenzitás függvényt sikerült meghatározni, a másik közvetlenül számítható. Egy további hasznos tulajdonságot nyernek a kibővített eljárások, nem szükséges a teljes impedancia függvényt megadni, elég annak csak a valós vagy képzetes részét, valamennyi rendszerjellemező függvény egyértelműen meghatározható konvolúció segítségével. Ez különösen akkor praktikus, ha a rendszerünk komplex impedanciája nem mérhető meg pontosan, de tisztán a valós vagy képzetes része igen.

A második téziscsoportomban bevezetett admittancia alapú reprezentációknak köszönhetően a tranziens mérések kiértékelésére használt NID módszer a problémák szélesebb körében is alkalmazhatóvá vált. Ez a kiterjesztés különösen a tisztán elektromos hálózatok mérésekor praktikus.

Harmadik téziscsoportom eredményeit a gyakorlati alkalmazásokban jelentkező problémák motiválták. Az itt bemutatott eredmények segítségével egy karakterizálást követően direkt módon kompenzálhatóvá válik három jelentős, az időállandó spektrum mérését érintő, rendszeres hiba, valamint a méréstől függetlenül verifikálni tudjuk a kiértékeléshez használt hálózatidentifikációs algoritmus implementációját.

A negyedik tételben bemutatott eredmények segítségével optimalizálni tudjuk a hálózatleíró függvények között transzformáló divergáló operátorfüggvények regularizációját. Ezeket a regularizált operátorfüggvényeket használja több, az előző téziscsoportokban bemutatott eljárás, így azok pontosságára, valamint jel-zaj viszonyára közvetlenül hatással van.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni kollégáimnak, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Elektronikus Eszközök Tanszéke *minden* munkatársának, hogy munkámban támogattak és biztosították az alkotó légkört.

Köszönöm Dr. Székely Vladimír témavezetőmnek, hogy tanácsaival és útmutatásaival támogatta doktori értekezésem létrejöttét.

Külön köszönöm Dr. Yamamoto Tetsuya (山本 哲也) úrnak, hogy felkeltette a téma iránt az érdeklődésemet.

Szeretném megköszönni családomnak a támogatást és a türelmet, ami nélkül nem tudtam volna elérni ezeket az eredményeket.

A függelék

Az irodalmi áttekintéshez szükséges levezetések, bizonyítások

A.1. A (2.58) egyenlet átrendezése

A $\sigma \rightarrow 0, -\infty < \omega < +\infty$ integrálási utat alkalmazva:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} \mathbf{Z}(s) \cdot \exp(st) ds. \quad (\text{A.1})$$

Az integrálási út a $j\omega$ tengely $\sigma = 0$ -nál:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega. \quad (\text{A.2})$$

Az integrált két részre szeparálva:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \mathbf{Z}(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{Z}(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega. \quad (\text{A.3})$$

Két egymást követő helyettesítés után, ahol $\omega = -k$ és $k = \omega$ az első integrál:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{Z}(-j\omega) \cdot \exp(-j\omega t) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{Z}(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\mathbf{Z}(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) + \mathbf{Z}(-j\omega) \cdot \exp(-j\omega t) \right) d\omega. \quad (\text{A.5})$$

Ameddig a $\mathbf{Z}(\tilde{s}) = \tilde{\mathbf{Z}}(s)$ reláció igaz az impedancia függvényre, az összegzés két tagja konjugált párok. Ez azt jelenti, hogy a képzetes részek kiejtik egymást, csak a valós részek maradnak meg.

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \{ \mathbf{Z}(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) \} d\omega \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \{ (\operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(j\omega) \} + j \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(j\omega) \}) \cdot (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \} d\omega \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(j\omega) \} \cdot \cos(\omega t) - \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(j\omega) \} \cdot \sin(\omega t)) d\omega. \quad (\text{A.8})$$

Új változókat bevezetve és felhasználva a $\frac{da}{dt} = \frac{da}{dz} \frac{dz}{dt}$ összefüggést:

$$\begin{aligned} \left. \frac{da}{dz} \right|_{\zeta=-z} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \exp(\Omega - \zeta) \cos(\exp(\Omega - \zeta)) d\Omega - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(\Omega) \} \exp(\Omega - \zeta) \sin(\exp(\Omega - \zeta)) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ahol $\omega = \exp(\Omega)$, $t = \exp(-z)$.

A.2. (2.63) belső relációi

Kihasználjuk azt a tényt, hogy $\mathbf{Z}(s)$ egy megvalósítható hálózat impedancia függvénye, ezért $\mathbf{Z}(1/s)$ egy transzformált hálózatot ír le, ami szintén megvalósítható. Az $s \rightarrow 1/s$ helyettesítés megfelel a $j\omega \rightarrow 1/j\omega = -j \cdot 1/\omega$ és $\omega \rightarrow -1/\omega$ -nak. Alkalmazva a $\mathbf{Z}(\omega) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(\omega) \} + j \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(\omega) \}$ jelölést az eredeti hálózatra,

$$\mathbf{Z}^t(\omega) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(1/\omega) \} - j \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(1/\omega) \} \quad (\text{A.10})$$

igaz (a $\mathbf{Z}(\tilde{s}) = \tilde{\mathbf{Z}}(s)$ relációt használtuk fel ismét). Az $\omega \rightarrow 1/\omega$ helyettesítés az $\Omega \rightarrow -\Omega$ -nak felel meg. Ezek alapján

$$\mathbf{Z}^t(\Omega) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(-\Omega) \} - j \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(-\Omega) \}. \quad (\text{A.11})$$

Alkalmazzuk (2.57) összefüggést $\mathbf{Z}^t(\Omega)$ -ra:

$$W_I(\Omega) \otimes \operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(-\Omega) \} = -W_R(\Omega) \otimes \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(-\Omega) \}. \quad (\text{A.12})$$

Mindkét oldalt deriválva Ω szerint:

$$W_I'(\Omega) \otimes \operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(-\Omega) \} = -W_R'(\Omega) \otimes \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(-\Omega) \}. \quad (\text{A.13})$$

Az $\Omega = -x$ változó tükrözésével a végeredmény:

$$W_I'(-x) \otimes \operatorname{Re} \{ \mathbf{Z}(x) \} = -W_R'(-x) \otimes \operatorname{Im} \{ \mathbf{Z}(x) \}. \quad (\text{A.14})$$

B függelék

A tézisekhez szükséges levezetések, bizonyítások

B.1. (3.31) bizonyítása

Az alapötlet: ha két jól viselkedő függvény (folytonos, egyértékű, stb.) deriváltja megegyezik, akkor a két függvény szintén megegyezik egy konstans K faktortól eltekintve. Alkalmazzuk a $y = x \cdot C$ helyettesítést:

$$f(C) = - \int_0^{\infty} \frac{\cos(y) - \exp(-y/C)}{y/C} \frac{dy}{C} + K = - \int_0^{\infty} \frac{\cos(y) - \exp(-y/C)}{y} dy + K \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d}{dC} f(C) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{y}{C}\right) \frac{y}{C^2} dy = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-y/C)}{C^2} dy \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d}{dC} f(C) = - \left[\frac{\exp(y/C)}{C} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{C}, \quad (\text{B.3})$$

ami $\frac{d}{dC} \ln(C)$ ha $C > 0$ a $(0, \infty]$ intervallumon.

A következő lépésben a K konstans határozzuk meg. A következő határozott integrál létezik [36]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x) - \exp(-x)}{x} dx = 0. \quad (\text{B.4})$$

Ezek szerint ha $C = 1$ akkor $f(C) = 0$. Mivel $f(C) = \ln(C) + K$, ebből következik, hogy $K = 0$.

Negatív C esetén a $[-\infty, 0)$ intervallumon egy további függvényt kell definiálni:

$$\text{logm}(C) = \ln(-C) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d}{dC} \text{logm}(C) = \frac{1}{C}. \quad (\text{B.6})$$

Vagyis $1/C$ a deriváltja a $\ln(-C)$ függvénynek is – ha $C < 0$, a $[-\infty, 0)$ intervallumon. $f(C) = \ln(|C|)$ minden valós számra kivéve $C = 0$.

B.2. Az $E(x)$ függvény alkalmas alakjai

[15] nyomán:

$$E_1(x) = F_0(x) \otimes F_1(x) \quad (\text{B.7})$$

vagy

$$E_n(x) = E_{n-1}(x) \otimes F_n(x), \quad (\text{B.8})$$

ahol

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{ha } -\frac{\Delta}{2} < x < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{máshol} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{\exp(-nx)}{2/n \cdot \text{sh}(n\Delta/2)} & \text{ha } -\frac{\Delta}{2} < x < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{máshol} \end{cases}. \quad (\text{B.10})$$

$E_1(x)$ félértékszélessége Δ , $E_2(x)$ félértékszélessége $\sim 1.5 \cdot \Delta$.

B.3. Az $E_2(x)$ analitikus kifejezései

$E_2(x)$ általában alkalmas a (2.64-2.65) egyenletek által meghatározott transzformációkhoz [15].

$$E_2(x) = K \cdot \exp(-x) \cdot \begin{cases} \text{sh}^2\left(\frac{3}{4}\Delta + \frac{1}{2}x\right) & \text{ha } -\frac{3}{2}\Delta \leq x < -\frac{1}{2}\Delta \\ \text{ch}\Delta - \text{ch}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \cdot \text{ch}x & \text{ha } -\frac{1}{2}\Delta \leq x < \frac{1}{2}\Delta \\ \text{sh}^2\left(-\frac{3}{4}\Delta + \frac{1}{2}x\right) & \text{ha } \frac{1}{2}\Delta \leq x < \frac{3}{2}\Delta \\ 0 & \text{máshol} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

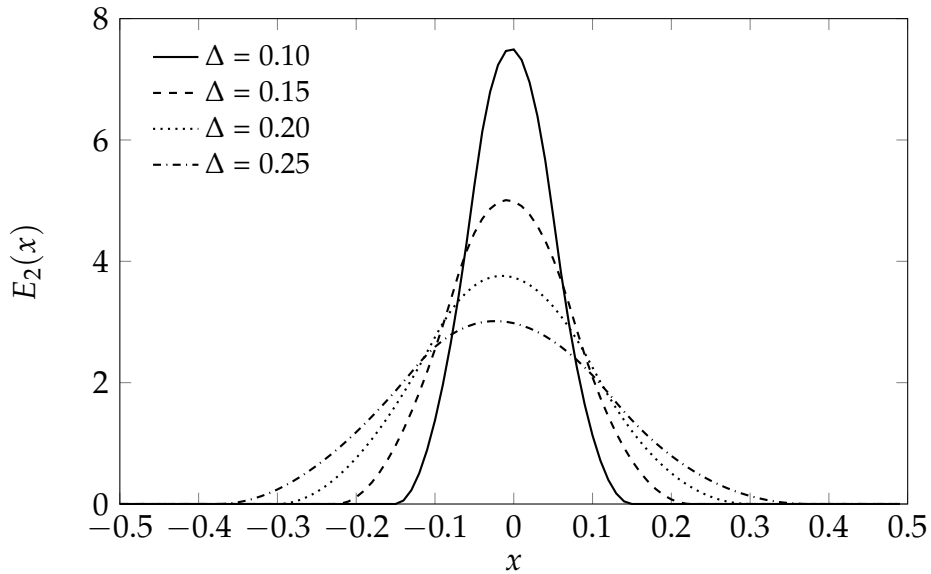
ahol

$$K = \frac{1}{\Delta \cdot \text{sh}\Delta \cdot \frac{\Delta}{2}}. \quad (\text{B.12})$$

Ez a B.1. ábrán látható keskeny impulzus néhány Δ érték esetén. Ennek az egyenletnek az integrálja mindig 1.

Az $E_n(x)$ függvények fő előnye, hogy konvolúciójuk a $\exp(x) \cdot \sin / \cos(\exp(x))$ típusú függvényekkel analitikusan kifejezhető. Például a $W'_R(\Omega) \otimes E_2(\Omega)$ függvény analitikus formája:

$$\begin{aligned} & -\left(\exp(x) \cdot \sin(\exp(x))\right) \otimes E_2(x) = \\ & = -\frac{K}{2} \exp(-2x) \sum_{i=0}^1 (-1)^i \exp\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta\right) \cdot \sum_{j=0}^1 (-1)^j \exp((i+j-1)\Delta). \end{aligned}$$

B.1. ábra. Az $E_2(x)$ függvény

$$\cdot \sum_{k=0}^1 (-1)^k \cos \left(\exp \left(x + \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta - \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta - \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta \right) \right). \quad (\text{B.13})$$

A $W_1'(\Omega) \otimes E_2(\Omega)$ függvény hasonló, csak a $\cos()$ függvényt kell $-\sin()$ -ra cserélni.

A $\sin / \cos(\exp(x))$ típusú függvények konvolúciójához $F_1(x) \otimes F_2(x)$ alkalmazható sikerrel.

C függelék

A disszertációban használt jelölések

a	hálózati függvény valós része
$a(t), a(z)$	rendszer egységugrásra adott válasza
A	logaritmikusan független változó
$A(\Omega)$	általános válaszfüggvény
b_c	hálózati függvény képzetes része
$B(\Omega)$	általános gerjesztésfüggvény
c	hosszegységre/térfogategységre eső kapacitás
c_f	fajhő
C	kapacitás
C_{th}	hőkapacitás
$D(\tau)$	időállandó spektrum
$D_m(\tau)$	mért válaszhoz tartozó időállandó spektrum
$e(z), e_r(z)$	hibafüggvény
$e(t)$	nemideális gerjesztésfüggvény deriváltja
$E(t)$	nemideális gerjesztésfüggvény
$f(C)$	általános függvény
g	hosszegységre eső átvezetés
$G(\zeta)$	admittancia alapú időállandó spektrum
G_0	hálózat DC vezetése
i	váltakozó áram pillanatnyi értéke
$\mathbf{I}(s)$	áram válasz Laplace transzformáltja
$I_d(\Sigma)$	dipólus intenzitás függvény
$I_{dY}(\Sigma)$	admittancia alapú dipólus intenzitás függvény

j	imaginárius egység
$K(\tau)$	korrekciós függvény
$K(x)$	struktúra függvény
l	hosszegységre eső induktivitás
L	hossz
$m(t)$	tényleges gerjesztés mellett mérhető válaszfüggvény
n	egész szám
$n(t)$	mérőerősítő kimeneti jele
q	hőáram
$q(t)$	nemideális gerjesztés és véges sávszélességű erősítő kombinált súlyfüggvénye
r	hosszegységre eső ellenállás
r_0	félgömb sugara
$r(x)$	normált autokorrelációs függvény
R	ellenállás általában, időállandó intenzitás
R_0	teljes ellenállás, DC ellenállás
R_{th}	hőellenállás
$R(z), R(\zeta)$	logaritmikus időállandó spektrum
$R_M(z)$	tükrözött logaritmikus időállandó spektrum
$R(\Omega)$	autokorrelációs függvény, lehet indexe
s	lineáris komplex frekvencia változó
S	logaritmikus komplex frekvencia változó
$s(t)$	egykapu impulzusválasza
SNR	jel/zaj viszony
t	lineáris idő változó
T	hőmérséklet (általában abszolút hőmérséklet)
u	váltakozó feszültség pillanatnyi értéke, lineáris/logaritmikus frekvencia
$w(t)$	mérőerősítő súlyfüggvénye
$w_t(z)$	súlyfüggvény a NID dekonvolúcióhoz
$\mathbf{W}(\Omega), W(\Omega)$	operátorfüggvény, lehet indexe
$W_{\text{Re Im}}(x)$	valós \rightarrow képzetes transzformáció operátorfüggvénye
$W_{\text{Im Re}}(x)$	képzetes \rightarrow valós transzformáció operátorfüggvénye
x	abszcissza tengelyen távolságot jelöl, független változó

$Y(s), Y(S)$	admittancia
z	logaritmikus idő változó
$Z(s), Z(\omega), Z(\Omega)$	impedancia
$\Gamma(\omega)$	erősítő átviteli függvénye
δ	két mennyiség közötti különbség
$\delta(x)$	Dirac- δ függvény
Δ	két mennyiség közötti különbség, félértékszélesség
ε	egységugrás (Heaviside) függvény
ζ	logaritmikus időállandó
λ	térfogategységre eső termikus vezetőképesség
ϱ	sűrűség
σ	komplex sík valós tengelye
σ_p	pólus
σ_z	zérus
Σ	komplex sík logaritmikus valós tengelye
τ	időállandó
φ	a komplex sík negatív valós tengelyével bezárt szög
ω	lineáris frekvencia változó
Ω	logaritmikus frekvencia változó

Megjelent folyóiratcikkek

- [J1] Vladimír Székely and Albin Szalai. Transformation between Linear Network Features in Convolution Approach. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2013.
- [J2] Vladimír Székely and Albin Szalai. Measurement of the time-constant spectrum: Systematic errors, correction. *Microelectronics Journal*, 43(11):904–907, 2012.
- [J3] Albin Szalai and Vladimír Székely. Possible acceptance criteria for structure functions. *Microelectronics Journal*, 43(2):164–168, 2012.

Elbírálás alatti folyóiratcikkek

- [JN1] Albin Szalai and Vladimír Székely. Distributed RC One-Ports: Representative Functions and their Relations. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science*, 2014.

Konferenciakiadványban megjelent előadás

- [C1] Vladimír Székely and Albin Szalai. Measurement of the time-constant spectrum: Systematic errors, correction. In *Thermal investigations of ICs and Systems (THERMINIC)*, pages 45–48, Paris, 2011.
- [C2] Albin Szalai and Vladimír Székely. How do we know if a structure function is correct? In *Thermal investigations of ICs and Systems (THERMINIC)*, pages 80–83, Barcelona, 2010.

Tézisekhez szorosan nem kapcsolódó közlemények

- [N1] Albin Szalai, Zoltán Czirkos, and Vladimír Székely. A quasi-SPICE electro-thermal simulator. In *Thermal investigations of ICs and Systems (THERMINIC)*, pages 190–195, 2012.
- [N2] Albin Szalai and Gyula Horváth. Kapcsolt kapacitású szűrő tervezése orvosbiológiai alkalmazásokhoz. *Híradástechnika*, LXVI(4):35–43, 2012.
- [N3] Gergely Nagy, András Timar, Albin Szalai, Márta Rencz, and András Poppe. New simulation approaches supporting temperature-aware design of digital ICs. In *Proceedings of 28th Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium (SEMI-THERM)*, pages 313–318, 2012.

Irodalomjegyzék

- [1] Vladimír Székely. On the representation of infinite-length distributed RC one-ports. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 38(7):711–719, 1991.
- [2] Dirk Schweitzer, Heinz Pape, and Liu Chen. Transient Measurement of the Junction-To-Case Thermal Resistance Using Structure Functions: Chances and Limits. In *24th Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium*, pages 191–197, 2008.
- [3] Dirk Schweitzer, Heinz Pape, Rudolf Kutscherauer, and Martin Walder. How to evaluate transient dual interface measurements of the Rth-JC of power semiconductor packages. In *25th Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium*, pages 172–179, 2009.
- [4] Vladimír Székely and Tran Van Bien. Fine structure of heat flow path in semiconductor devices: a measurement and identification method. *Solid-State Electronics*, 31(9):1363–1368, 1988.
- [5] Vladimír Székely. A new evaluation method of thermal transient measurement results. *Microelectronics Journal*, 28:277–292, 1997.
- [6] Mentor Graphics® - Mechanical Analysis - MicReD Hardware Products, (hozzáférés 2013. augusztus 1.). URL: <http://www.mentor.com/products/mechanical/products/t3ster/options-accessories>.
- [7] Hendrik Wade Bode. Relations Between Attenuation and Phase in Feedback Amplifier Design. *Bell System Technical Journal*, 19(3):421–454, 1940.
- [8] B. S. Siegal. Measuring Thermal Resistance is the Key to a Cool Semiconductor. *Electronics*, 51:121–126, 1978.
- [9] H. Wiese and K. G. Weil. An Efficient Fourier Transform Algorithm for Frequency Domain of Several Decades Using Logarithmically Spaced Time Samples. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(7):1096–1099, 1988.
- [10] Vladimír Székely, András Poppe, and Márta Rencz. Algorithmic extension of thermal field solvers: time constant analysis. In *Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium, Sixteenth Annual IEEE*, pages 99–107, 2000.
- [11] M. S. Ghauri and J. J. Kelly. *Introduction to Distributed Parameter Networks*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.
- [12] Vladimír Székely and Márta Rencz. Thermal dynamics and the time constant domain. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 23(3):587–594, 2000.
- [13] I. N. Bronstein and K. A. Semendyayev. *Handbook of Mathematics, 3rd edition*. D. Van Nostrand, Princeton, 1997.

- [14] Wai-Kai Chen (editor). *The Circuits and Filters Handbook, 3rd edition*, volume Feedback, Nonlinear and Distributed Circuits, Chapter 18. CRC Press, 2009.
- [15] Vladimír Székely. Convolution calculus in the network theory and identification. In *Conference on Circuit Theory and Design ECCTD'97*, pages 49–56, Budapest, 1997.
- [16] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, Oxford, 1959.
- [17] Hendrik Wade Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. D. Van Nostrand: Princeton, 1945.
- [18] A. E. Gera. Bode's Integral Revisited. *International Journal of Systems Science*, 22(4):667–674, 1991.
- [19] A. Karimi, D. Garcia, and R. Longchamp. PID Controller Tuning Using Bode's Integrals. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 11(6):812–821, 2003.
- [20] G. F. Bryant and G. D. Halikias. Optimal Loop-Shaping for Systems with Large Parameter Uncertainty via Linear Programming. *International Journal of Control*, 62(3):557–568, 1995.
- [21] W. W. Solodownikow. *Stetige Lineare Systeme*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1959.
- [22] S. Cohn-sfetcu, M.R. Smith, S.T. Nichols, and D.L. Henry. A digital technique for analyzing a class of multicomponent signals. *Proceedings of the IEEE*, 63(10):1460–1467, 1975.
- [23] Lorenzo Codecasa, Dario D'Amore, and Paolo Maffezzoni. Compact Thermal Networks for Modeling Packages. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 27(1):96–103, 2004.
- [24] Márta Rencz and Vladimír Székely. Studies on the Nonlinearity Effects in Dynamic Compact Model Generation of Packages. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 27(1):124–130, 2004.
- [25] Joint Electron Devices Engineering Council (JEDEC) Solid State Technology Association. URL: <http://www.jedec.org/>.
- [26] JEDEC JC-15 committees. *JESD51-14 - Transient dual interface test method for the measurement of the thermal resistance junction-to-case of semiconductor devices with heat flow through a single path*, 2010.
- [27] JEDEC JC-15 committees. *JESD51-51 - Implementation of the electrical test method for the measurement of real thermal resistance and impedance of light-emitting diodes with exposed cooling surface*, 2012.
- [28] JEDEC JC-15 committees. *JESD51-52 - Guidelines for combining CIE 127-2007 total flux measurements with thermal measurements of LEDs with exposed cooling surface*, 2012.

- [29] L. T. Pillage and R. A. Rohrer. Asymptotic waveform evaluation for timing analysis. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, 9:352–366, 1990.
- [30] D.-G. Liu, V. Phanilatha, and M. N. Zhang. Asymptotic thermal analysis of electronic packages and printed-circuit board. In *Proceedings of 11th Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium (SEMI-THERM)*, pages 131–135, 1995.
- [31] Lorenzo Codecasa, Dario D’Amore, and Paolo Maffezzoni. Thermal networks for electro-thermal analysis of power devices. *Microelectronics Journal*, 32(10-11):817–822, 2001.
- [32] Lorenzo Codecasa, Dario D’Amore, and Paolo Maffezzoni. Physical interpretation and numerical approximation of structure functions of components and packages. *IEEE SEMI-THERM Symposium*, 2005.
- [33] Dirk Schweitzer. Transient dual interface measurement of the R_{th-JC} of power packages. In *Thermal Investigation of ICs and Systems*, number September, pages 14–19, Rome, 2008.
- [34] András Ambrózy. *Electronic Noise*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [35] W. B. Davenport and W. L. Root. *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*. McGraw-Hill, New York, 1958.
- [36] Wolfram Alpha LLC., Wolfram|Alpha, (hozzáférés 2013. március 1.). URL: <http://www.wolframalpha.com/input/?i=Integrate%5B%28Cos%5Bx%5D-Exp%5B-x%5D%29%2F%2C%7Bx%2C0%2CInfinity%7D%5D>.

Ábrák jegyzéke

2.1.	A távvezeték egy elemi szakaszának helyettesítő képe	7
2.2.	Az egyszerűsödött RC modell	7
2.3.	Termikus rendszerek modellje	8
2.4.	RC kétpólusok diszkrét időállandó spektruma	10
2.5.	RC kétpólus Foster helyettesítése	10
2.6.	10 dB/dekád meredekségű szakasz közelítése az amplitúdó meneten	13
2.7.	A zérusok relatív pozíciója két szomszédos pólus között	14
2.8.	A zérusok relatív pozíciója két szomszédos pólus között a Σ tengelyen	14
2.9.	Koncentrált paraméteres hálózat távirójelre emlékeztető dipólus intenzitás függvénye	15
2.10.	Az $s(z)$ vonal a komplex síkon	16
3.1.	Az elosztott termikus RC struktúra	23
3.2.	A $R(\zeta) \rightarrow I_d(\Sigma)$ transzformáció eredménye	23
3.3.	Az $I_d(\Sigma) \rightarrow R(\zeta)$ transzformáció eredménye	24
3.4.	Az $R(\zeta) \rightarrow I_d(\Sigma)$ transzformáció eredménye	25
3.5.	Az $I_d(\Sigma) \rightarrow R(\zeta)$ transzformáció eredménye	26
3.6.	Az $I_d(\Sigma) \rightarrow R(\zeta)$ transzformáció eredményének integrálfüggvénye	26
4.1.	Egy RC egykapu Foster második kanonikus alakja	31
4.2.	A NID módszer admittancia alapú változata	33
5.1.	A nemideális gerjesztés bekapcsolása	36
5.2.	A $t_{E_1} > 0$ eset	37
5.3.	A gerjesztés törtvonalas közelítése	38
5.4.	Az erősítő súlyfüggvénye	39
5.5.	A teljes mérési elrendezés blokkvázlata	40
5.6.	A $K(\tau)$ korrekciós függvény optimális <i>korai bekapcsolási idő</i> esetén ($T = 1.1 \mu\text{s}$, $d = 2 \mu\text{s}$, $r = 1 \mu\text{s}$)	42
5.7.	A verifikációs eljárás folyamatábrája	43
5.8.	A referencia struktúra egy teljesítmény MOS modellje	44
5.9.	A referencia struktúra időállandó spektruma	45
5.10.	Időállandó spektrumok összehasonlítása	45
5.11.	Az integrálfüggvényeken alapuló tolerancia séma	46
5.12.	A struktúra függvények összehasonlítása	46
5.13.	Az 1D teljesítmény MOS rétegvastagság szórásai	47

6.1. Egy divergáló operátorfüggvény, és annak regularizációja	49
6.2. (6.8) numerikus eredménye $W^*(\Omega)$ -ra $r_B(\vartheta \neq 0) = 0$ esetén, ha $W(\Omega) =$ (2.61), (2.53), (2.62) illetve (2.54)	51
B.1. Az $E_2(x)$ függvény	58

Táblázatok jegyzéke

3.1. A koncentrált paraméteres hálózat elemértékei	25
5.1. Az egyes időállandókhöz tartozó hibák	41
5.2. A referencia modell paraméterei	44