

Analóg Integrált Elektronikai Tervezés

DR SZALAI ALBIN | 2018 ŐSZI FÉLÉV



Zajok

A zaj statisztikus karakterisztikája

Zajtípusok

A zaj áramköri reprezentációja

Zaj egyfokozatú erősítőkből

Zaj áramtükörökben

Zaj differenciál párokban

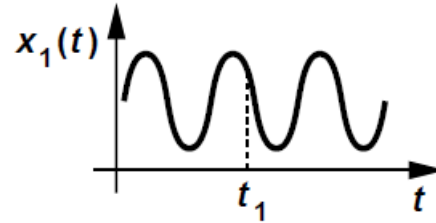
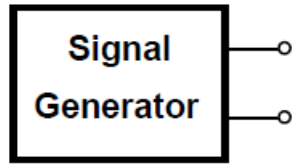
Zaj-teljesítmény Tradeoff

Zaj sávszélesség

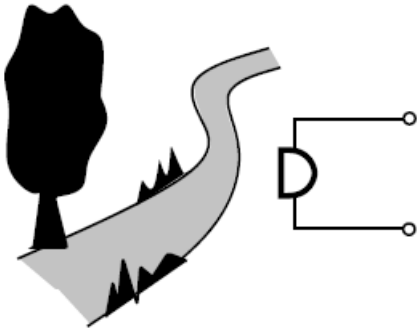
Bemeneti zaj integrálásának problémája



A zaj statisztikus karakterisztikája

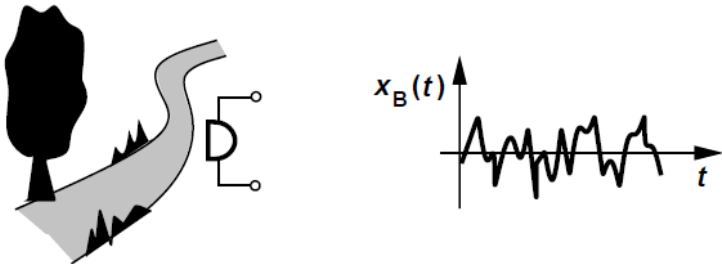
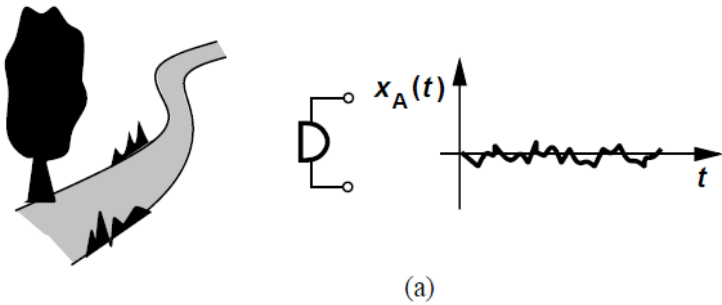


(a)



- A zaj egy véletlenszerű folyamat
- $x_1(t)$ megjósolható ha megfigyeljük a jelalakot, míg $x_2(t)$ nem.
 - Ez az alapvető különbség a determinisztikus és a véletlenszerű jelenségek között.
- A zaj pillanatnyi értéke időtartományban megjósolhatatlan

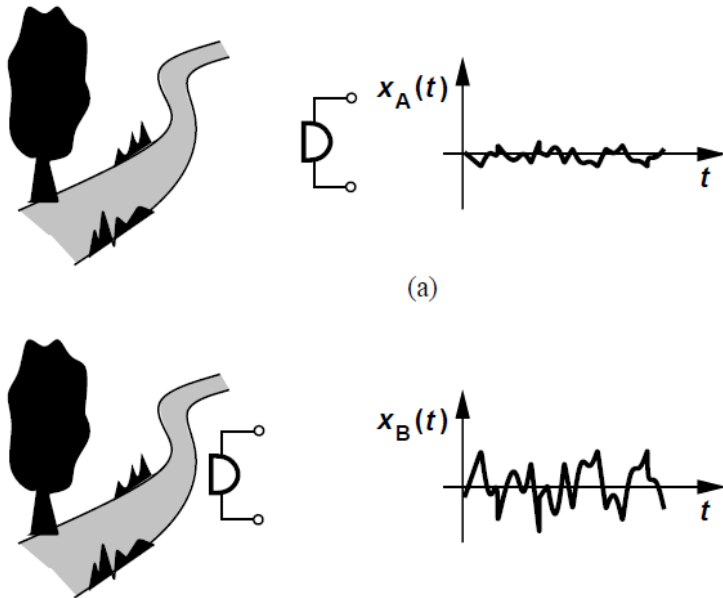
A zaj statisztikus karakterisztikája



- A zaj elemzéséhez statisztikai modellre van szükség.
- A zaj átlagteljesítménye megjósolható.
 - Ez a megközelítés egy áramkör legtöbb zajforrására alkalmazható
- Egy periodikus $v(t)$ feszültségjel teljesítménye egy R_L ellenálláson T periódusidő alatt a következőképp írható:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{v^2(t)}{R_L} dt$$

A zaj statisztikus karakterisztikája

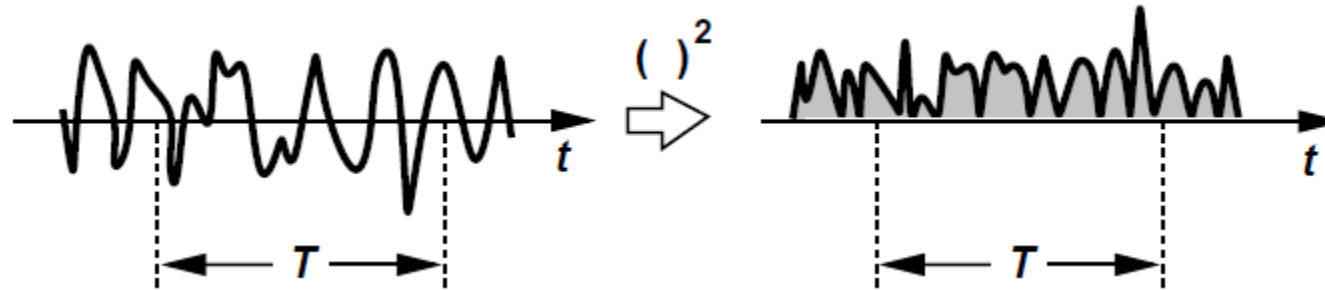


- Egy véletlenszerű (aperiodikus) jel esetén a mérést hosszú ideig kell végezni, hogy reprezentatív eredményt kapjunk.

$$P_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{x^2(t)}{R_L} dt$$

- $x(t)$ egy feszültség típusú mennyiség.
- $x_A(t)$ nagyobb teljesítményt ad le a rezisztív terhelésnek, mint $x_B(t)$.

A zaj statisztikus karakterisztikája



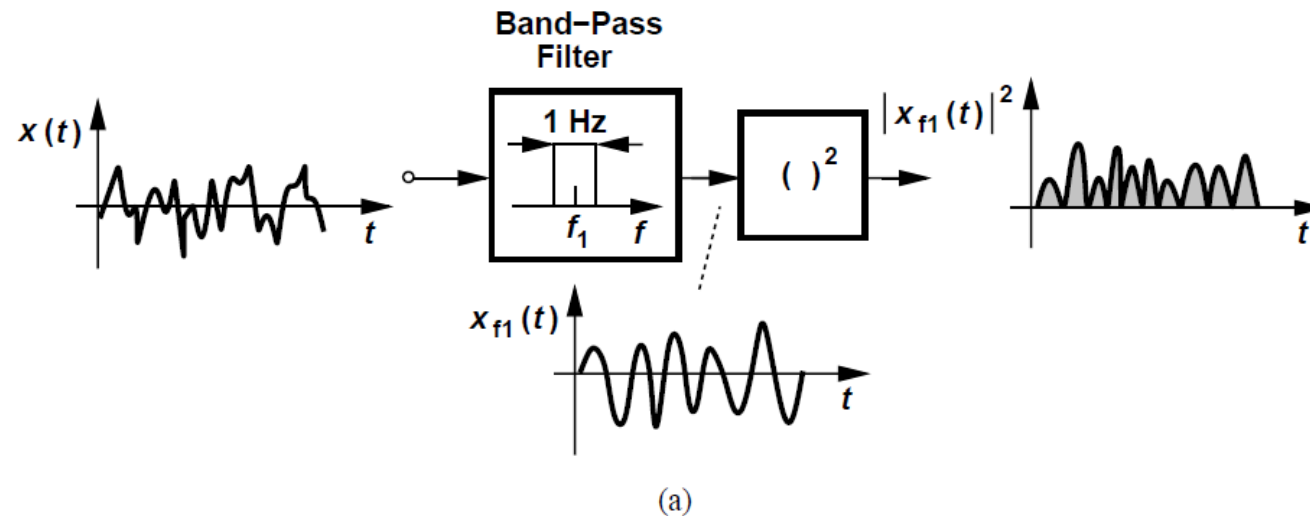
- A $x(t)$ zaj átlagteljesítményének kiszámításához:
 - Emeljük négyzetre a jelet!
 - Hosszú periódusidő használatával számítsuk ki a jelforma alatti területet!
 - Normalizáljunk T-re!
- Egyszerűbb számításokhoz P_{av} felírható a következőképp:

$$P_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt$$

- P_{av} mértékegysége V^2 , W helyett
- A zaj RMS feszültsége: $\sqrt{P_{av}}$

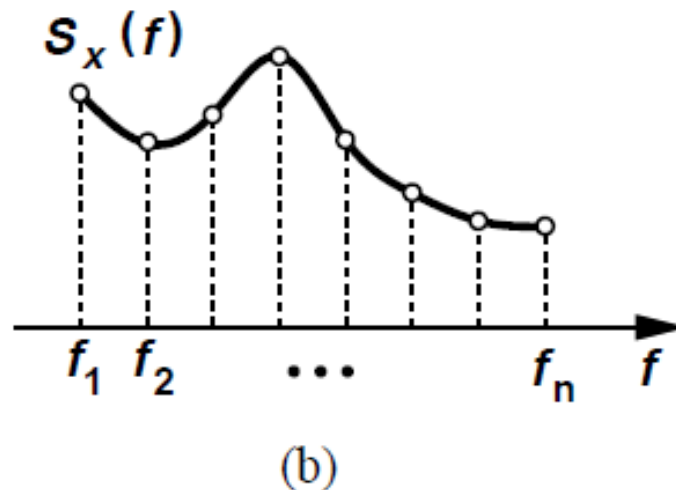
Zaj spektrum

- A zaj frekvenciatartalmát a spektrum írja le.
- Ezt a zaj spektrális teljesítménysűrűségének is hívják. (PSD: power spectral density)
 - Megmutatja, hogy mekkora teljesítménye van a zajnak minden frekvencián
- Egy $x(t)$ zaj $S_x(f)$ PSD-je nem más, mint $x(t)$ átlagos teljesítménye egy adott f frekvencia körüli 1Hz-es tartományban.
- Az (a) ábra mutatja $S_x(f_1)$ kiszámításának módját. (Egy adott frekvencia 1 Hz-es környezetében lévő teljesítmény).



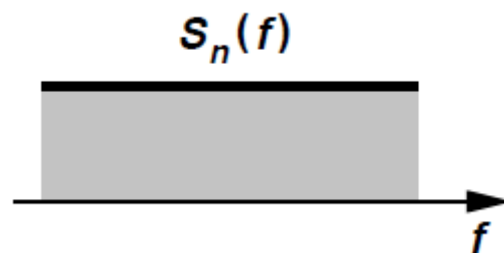
Zaj spektrum

- A teljes PSD kiszámítható, ha ismételtjük az előző dián bemutatott módszert különböző középfrekvenciájú sávszűrők használatával.
- $S_x(f)$ reprezentálja egy jel minden frekvencián közvetített teljesítményét, vagyis a jel teljes teljesítményét.
 - Általánosan a mértékegysége W/Hz.
- Jelfeldolgozásban a PSD-t az autokorrelációs függvény Fourier transzformáltjaként definiálják.
 - A két meghatározás ekvivalens.



Zaj spektrum

- Úgy mint P_{av} esetén, R_L hatását eliminálni szoktuk $S_x(f)$ kifejezéséből
- $S_x(f)$ használatos mértékegysége V^2/Hz , W/Hz helyett
- Bevett szokás $S_x(f)$ négyzetgyökét venni, melynek mértékegysége $V/\sqrt{Hz}$
- A zajok egy fajtája a fehér zaj
 - Minden frekvencián ugyanakkora a PSD értéke
- A definíciót szigorúan értelmezve fehér zaj nem létezik, mert a jel teljesítménye nem lehet végtelen
- Ha egy zajspektrum a számunkra érdekes frekvenciatartományban vízszintes, akkor azt fehér zajnak tekintjük

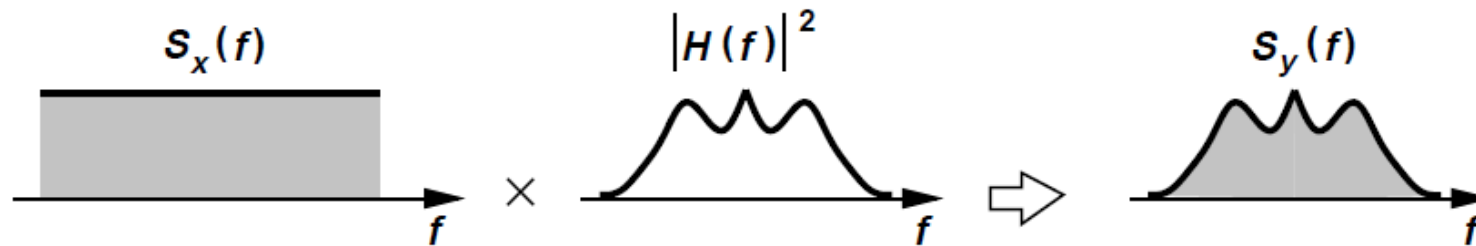


Tétel

- Ha egy $S_x(f)$ spektrummal rendelkező jelet egy lineáris időinvariáns (LTI) rendszerre adunk, aminek az átviteli függvénye $H(s)$, akkor a kimeneti spektrum $S_y(f)$ a következő:

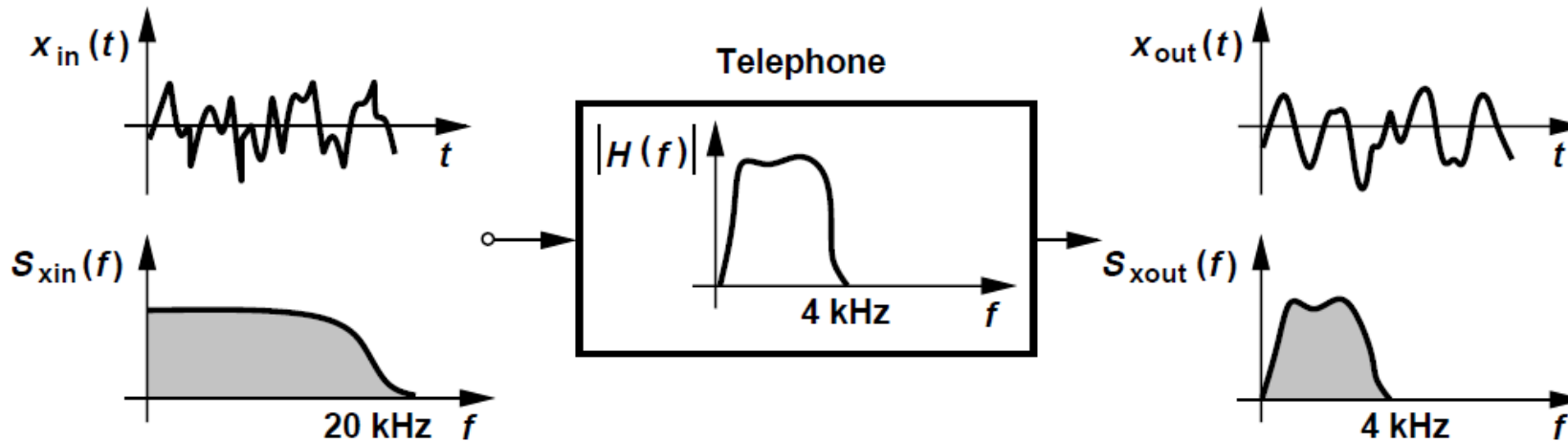
$$S_Y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

- Ahol $H(f) = H(s = j2\pi f)$
- A jel spektrumát formálja a rendszer átviteli függvénye.



Tétel: Példa

- Egy szokásos telefon sávszélessége körülbelül 4 kHz tehát a hang magasabb frekvenciájú komponenseit elnyomja.
- A korlátolt sávszélességnek köszönhetően $x_{\text{out}}(t)$ lassabban változik, mint $x_{\text{in}}(t)$
 - Néha nehéz felismerni a hívó hangját.

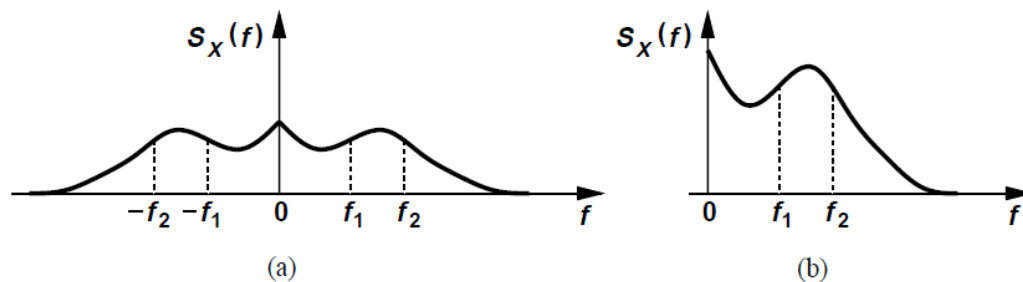


Kétoldalas és egyoldalas spektrum

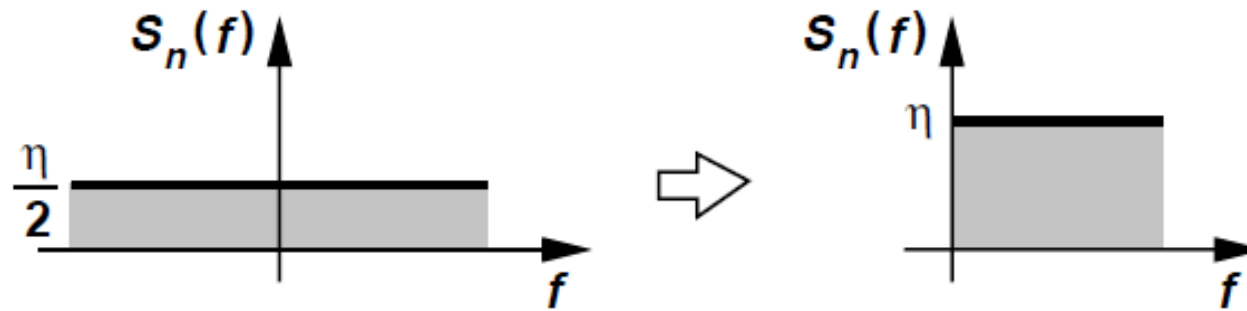
- $S_x(f)$ páros függvénye f -nek ha $x(t)$ valós.
- $x(t)$ összeteljesítménye egy $[f_1, f_2]$ frekvenciatartományban:

$$\begin{aligned} P_{f_1, f_2} &= \int_{-f_2}^{-f_1} S_x(f) df + \int_{+f_1}^{+f_2} S_x(f) df \\ &= \int_{+f_1}^{+f_2} 2S_x(f) df \end{aligned}$$

- A spektrum negatív frekvenciájú tartományát a függőleges tengelyen tükrözzük és hozzáadjuk a pozitív oldalhoz.
- Az (a) ábrán a kétoldalas, míg a (b)-n az egyoldalas spektrum található.



Kétoldalas és egyoldalas spektrum



- A kétoldalas fehér zajspektrum tükrözhető a függőleges tengely mentén, ami egy egyoldalas fehér zajspektrumot eredményez, ahogy az ábra is mutatja.
- A spektrum megmutatja egy kis frekvenciaintervallumban lévő teljesítmény értékét minden frekvencia körül, utalva ezzel az időtartománybeli jel változásának gyorsaságára.

Amplitúdó eloszlás

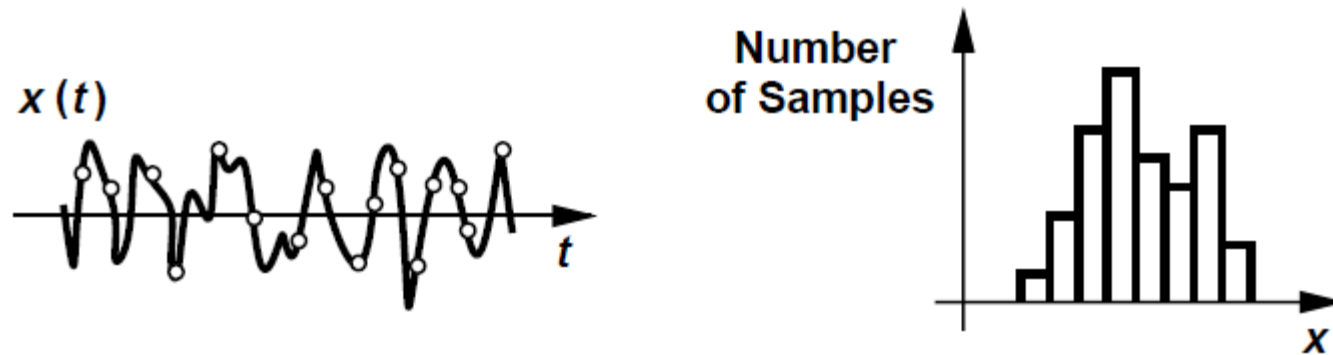
- Habár a zaj pillanatnyi értéke megjósolhatatlan, lehetséges egy amplitúdó eloszlást készíteni ha a zaj jelalakját hosszú ideig megfigyeljük.
- Az eloszlás jelzi, hogy egy érték hányszor fordul elő.
- $x(t)$ zaj amplitúdó eloszlását valószínűségi sűrűségfüggvénynek (PDF: Probability density function) is hívják és a következőképpen definiálják:

$$p_X(x)dx = \text{probability of } x < X < x + dx$$

- ahol X $x(t)$ adott időpillanatban mért értéke.

Amplitúdó eloszlás

- Hogy megbecsüljük az eloszlást, sok pontban mintavételezzük $x(t)$ -t és kis szélességű intervallumokat készítünk, melyek magassága reprezentálja, hogy hányszor mértünk az adott intervallumba tartozó értéket, végül normalizáljuk a magasság értékeket a mintavételek összes számára.
- Az ábra egy példát mutat az amplitúdó eloszlásra.



- PDF nem tartalmaz információt a jel frekvenciartalmára vonatkozóan, vagyis hogy $x(t)$ milyen gyorsan változik az időtartományban.

Centrális határeloszlás tétele

- Centrális határeloszlás tétele: Ha sok, független, véletlenszerű, tetszőleges valószínűségi sűrűségfüggvénnyel rendelkező folyamatot összegezzük, akkor az összeg PDF-e jó közelítéssel Gauss eloszlású.
- A legtöbb természetes folyamat Gauss eloszlást mutat.
 - Például egy ellenállás zaja, amit nagy mennyiségű független statisztikájú elektron mozgása okoz.
- A gauss PDF matematikai definíciója:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x - m)^2}{2\sigma^2}.$$

- σ és m az eloszlás szórását és középpontját jelöli.
- Gauss eloszlás esetén σ megegyezik a zaj rms értékével.

Korrelált és korrelálatlan források

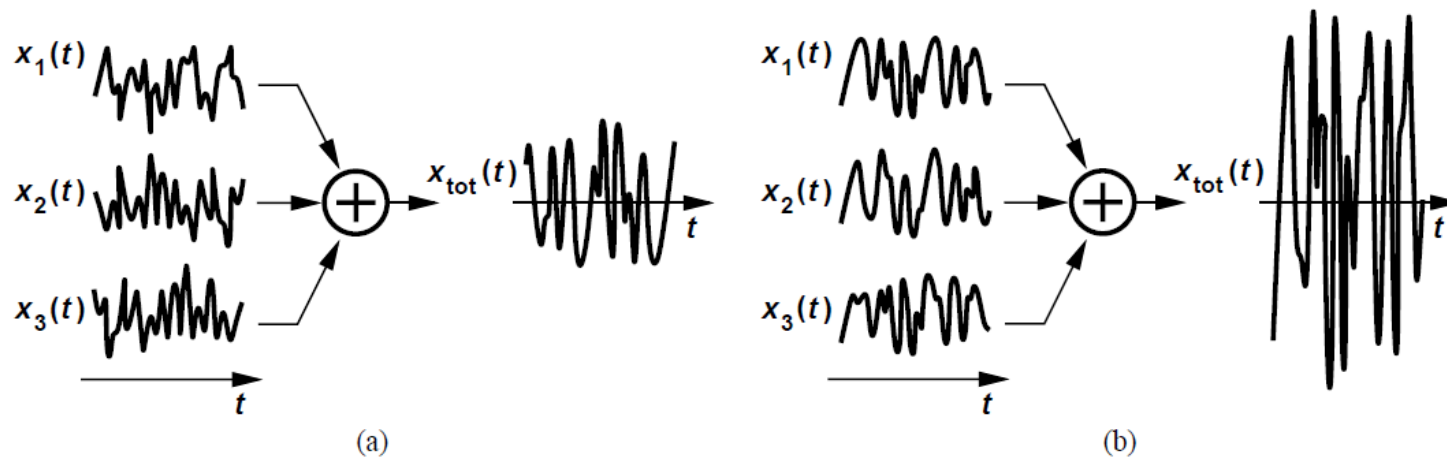
- A szuperpozíció elve alkalmazható determinisztikus feszültségekre és áramokra, de nem véletlenszerű zajokra.
- Az átlagos zajteljesítmény érdekesebb számunkra.
- Nézzük meg két zaj, $x_1(t)$ és $x_2(t)$ összegét és vegyük az összeteljesítményük átlagát:

$$\begin{aligned}P_{av} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [x_1(t) + x_2(t)]^2 dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_2^2(t) dt \\&\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} 2x_1(t)x_2(t) dt \\&= P_{av1} + P_{av2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} 2x_1(t)x_2(t) dt,\end{aligned}$$

- P_{av1} és P_{av2} jelöli $x_1(t)$ és $x_2(t)$ átlagos teljesítményét.
- A harmadik tag a korreláció $x_1(t)$ és $x_2(t)$ között.

Korrelált és korrelálatlan források

- A korrelációs integrál jelzi, hogy mennyire “hasznló” a két jelalak.
- A független eszközök által generált zajok korrelálatlanok, az integrál nullához közelít.
 - $P_{av} = P_{av1} + P_{av2}$
- A szuperpozíció elve érvényes a korrelálatlan zajforrások teljesítményére.
- A korrelált zajok (b) összteljesítménye nagyobb, mint a korrelálatlan zajoké (a).



Jel-zaj viszony

- A jel-zaj viszony definíciója (SNR: Signal-to-noise ratio):

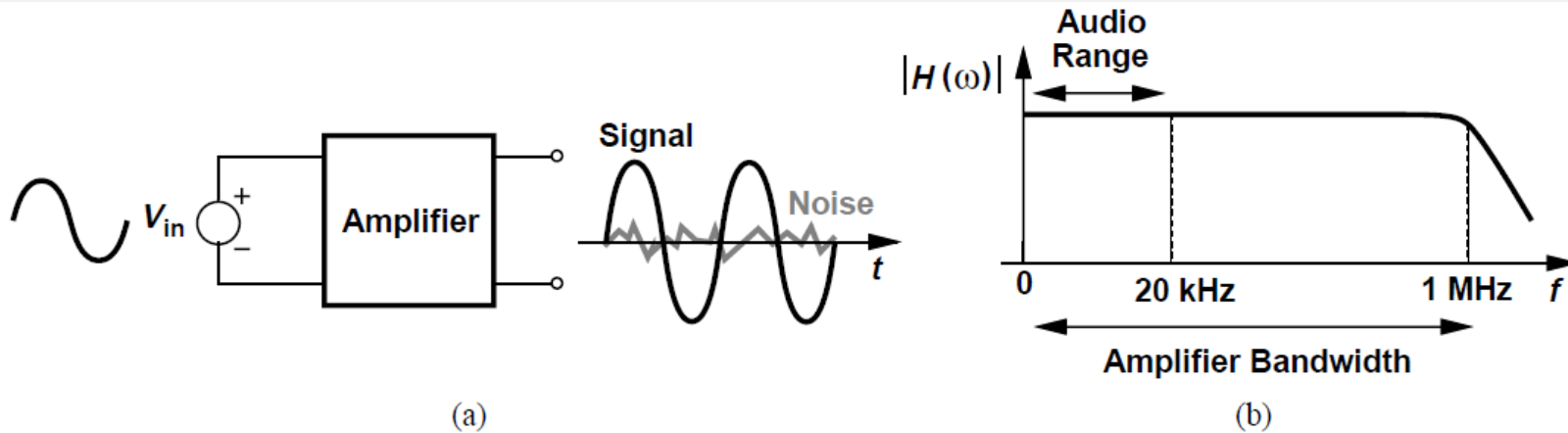
$$\text{SNR} = \frac{P_{sig}}{P_{noise}}$$

- Egy zajos jel jel-zaj viszonyának magasnak kell lennie, hogy értelmezhető legyen.
 - Az audio jeleknek minimum 20 dB SNR-re van szüksége
- Egy A csúcsértékű szinuszos jel teljesítménye: $P_{sig}=A^2/2$.
- A zaj átlagos teljesítménye megegyezik a spektruma alatti területtel.

$$P_{noise} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{noise}(f) df.$$

- P_{noise} nagyon nagy lehet, ha $S_{noise}(f)$ széles frekvenciatartománnyal rendelkezik.

Jel-zaj viszony



- A fenti erősítő ((a) ábra) 1 MHz-s sávszélességgel rendelkezik és egy audio jelet erősít ((b) ábra).
- A jel minden zajkomponenst tartalmaz az 1MHz-s sávszélességben.
 - SNR elfogadhatatlanul kicsi lehet.
- Az áramkör sávszélességét csökkenteni kell, hogy minimalizálni tudjuk a teljes integrált zajteljesítményt.
 - Ez történhet az erősítőn belül vagy egy soros aluláteresztő szűrővel.

A zaj analízisének folyamata

- Egy adott áramkör kimeneti jelét a belső zajforrások terhelik.
 - A kimeneti jelen lévő zajra vagyunk kíváncsiak
- Négy lépés:
 - Azonosítsuk a zajforrásokat és nézzük meg mindegyik spektrumát!
 - Keressük meg az átviteli függvényt minden zajforrástól a kimenet felé!
 - Használjuk a: $S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2$ tételt, hogy kiszámítsuk a kimeneten lévő zaj spektrumát minden zajforrásra!
 - Összegezzük az összes kimeneti spektrumot figyelembe véve a korrelált és a korrelálatlan zajforrásokat!
- Integráljuk a kimeneti zaj spektrumát $-\infty$ -tól ∞ -ig, hogy megkapjuk a teljes kimeneti zajteljesítményt.

Zajtípusok

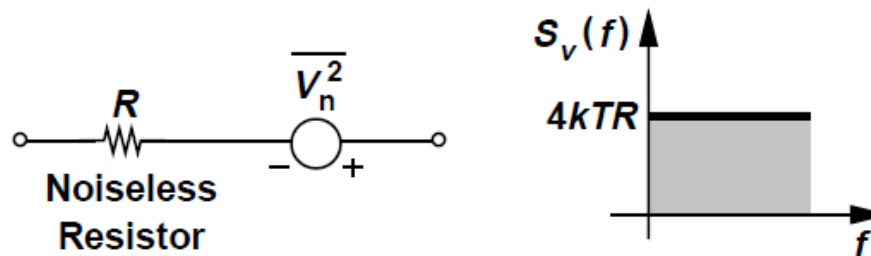
- Az integrált áramkörök által feldolgozott jeleket két fajta zaj terhelheti:
 - Eszköz elektronikus zaja
 - Környezeti zaj (könyv 19 fejezet)

Ellenállások termikus zaja

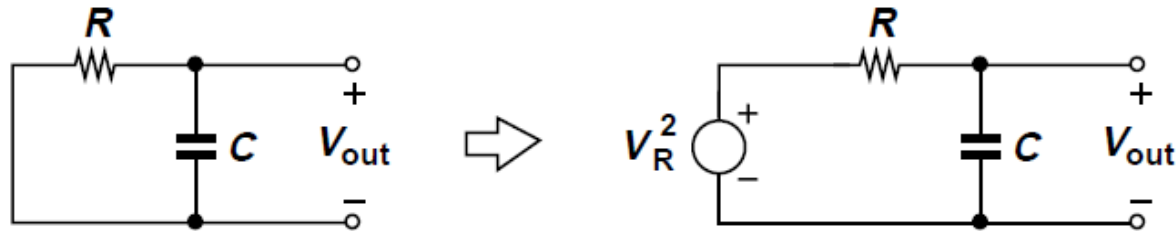
- Egy vezetőben az elektronok végtelenszerű mozgása fluktuációkat okoz a rajta mért feszültségben akkor is, ha az átlag árama nulla
- Egy ellenállás termikus zaja modellezhető egy soros feszültségforrással, ami egyoldalas spektrummal rendelkezik

$$S_v(f) = 4kTR, \quad f \geq 0$$

- $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ a Boltzmann állandó
- $S_v(f)$ mértékegysége V^2/Hz , azt is írhatjuk: $\overline{V_n^2} = 4kTR$
- Egy 50Ω -os ellenállás zaja $T=300\text{K}$ -en $8.28 \cdot 10^{-19} \text{ V}^2/\text{Hz}$, vagy $0.91 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$
- $S_v(f)$ vízszintes egészen 100THz -ig, ezért fehér zajnak tekintjük



Ellenállás termikus zaja: példa



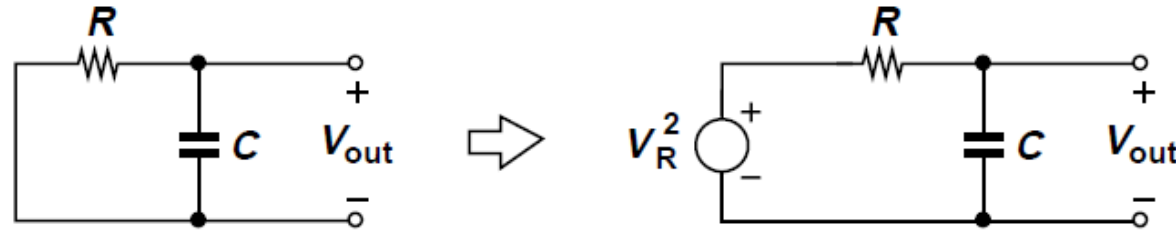
- Keressük meg a zajspektrumot és a teljes zajteljesítményt a kimeneten!
- Megoldás: Az ellenállás zajspektruma: $S_v(f) = 4kRT$
- Ha a zajt egy soros V_R feszültségforrással modellezzük az átviteli függvény V_R -től V_{out} -ra:

$$\frac{V_{out}}{V_R}(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

- A tételt alkalmazva az $S_{out}(f)$ kimeneti zajspektrum:

$$\begin{aligned} S_{out}(f) &= S_v(f) \left| \frac{V_{out}}{V_R}(j\omega) \right|^2 \\ &= 4kTR \frac{1}{4\pi^2 R^2 C^2 f^2 + 1} \end{aligned}$$

Ellenállás termikus zaja: példa



- Az ellenállás fehér zajspektrumát az aluláteresztő karakterisztika formálja
- A teljes zajteljesítmény a kimeneten:

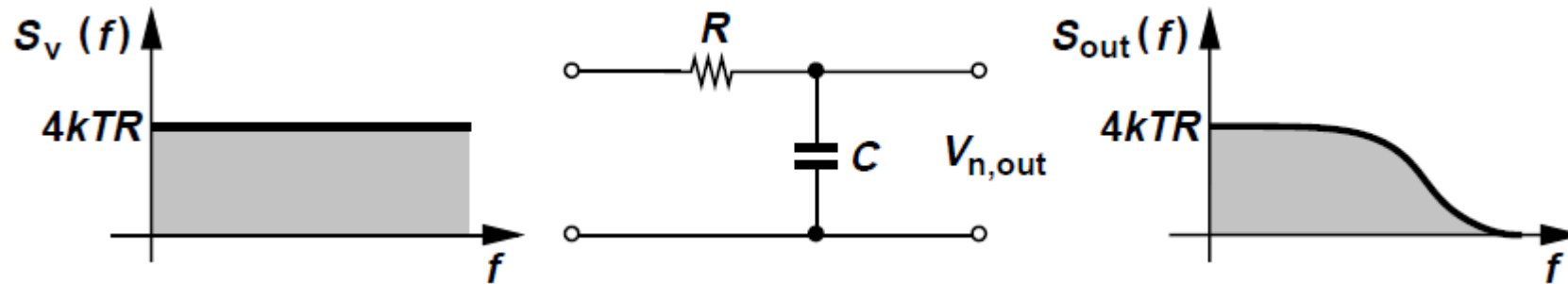
$$P_{n,out} = \int_0^\infty \frac{4kTR}{4\pi^2 R^2 C^2 f^2 + 1} df$$

- Az integrál az alábbi kifejezésre egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} P_{n,out} &= \frac{2kT}{\pi C} \tan^{-1} u \Big|_{u=0}^{u=\infty} \\ &= \frac{kT}{C}. \end{aligned}$$

- $P_{n,out}$ mértékegysége V^2/Hz , $\sqrt{kT/C}$ felfogható úgy, mint a kimeneten mérhető teljes rms feszültség.

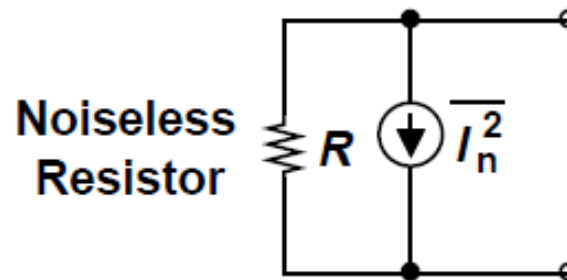
Ellenállás termikus zaja: példa



- Az RC aluláteresztő szűrő formálja az ellenállás zajspektrumát.
- A teljes zaj a kimeneten ($S_{out}(f)$ alatti terület) független az ellenállás értékétől.
- Intuitívan ez úgy látható be, hogy bár R növekedésével az egységnyi frekvenciasávra eső zajteljesítmény növekszik, de az áramkör sávszélessége csökken.
- kT/C zaj csak úgy csökkenthető, ha C értékét megnöveljük.

Ellenállás termikus zaja

- Az ellenállás termikus zaja egy párhuzamos áramforrással is reprezentálható:

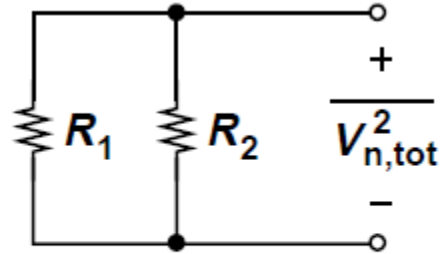


- Ez megfelel a soros feszültséggenerátorral történő reprezentációnak, ha:

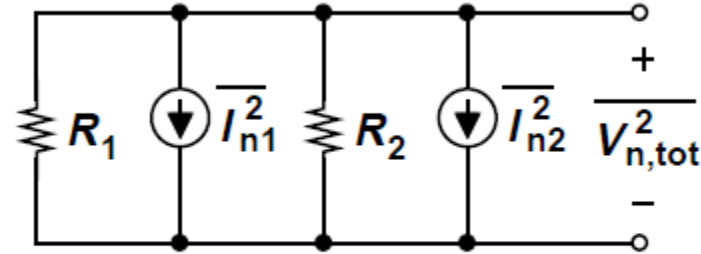
$$\overline{I_n^2} = 4kT/R$$

- ahol $\overline{I_n^2}$ mértékegysége A^2/Hz .
- Az áramkör topológiájától függően az egyik modell használata egyszerűbb számításokat eredményezhet, mint a másik.

Ellenállás termikus zaja: példa



(a)

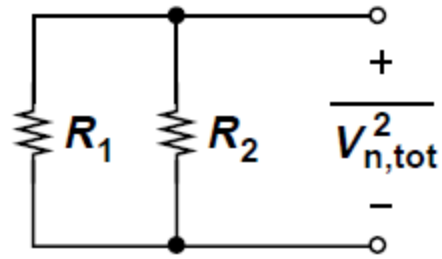


(b)

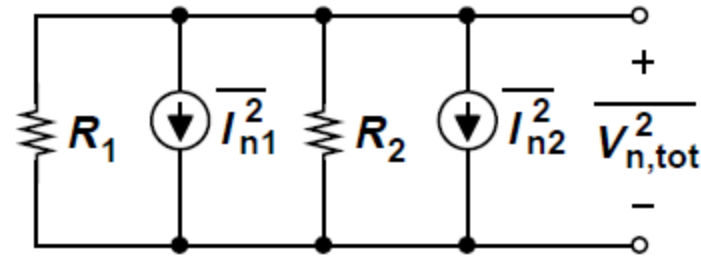
- Keressük meg a két párhuzamos ellenállás ekvivalens zajfeszültségét!
- Megoldás:
 - Mindkét ellenállás zaja modellezhető egy párhuzamos áramforrással, aminek a spektruma $4kT/R$.
 - Mivel a két zajforrás korrelálatlan, összeadjuk a teljesítményeket.

$$\begin{aligned}\overline{I_{n,tot}^2} &= \overline{I_{n1}^2} + \overline{I_{n2}^2} \\ &= 4kT \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)\end{aligned}$$

Ellenállás termikus zaja: példa



(a)



(b)

- Az ekvivalens zajfeszültség:

$$\begin{aligned}\overline{V_{n,tot}^2} &= \overline{I_{n,tot}^2} (R_1 \parallel R_2)^2 \\ &= 4kT (R_1 \parallel R_2),\end{aligned}$$

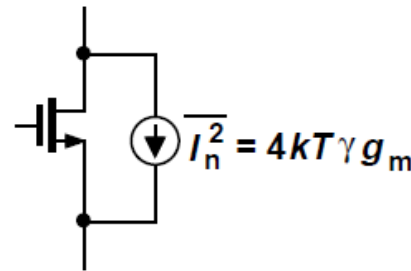
- Ez a jelölés 1Hz-es sávszélességet feltételez.

MOSFET termikus zaja

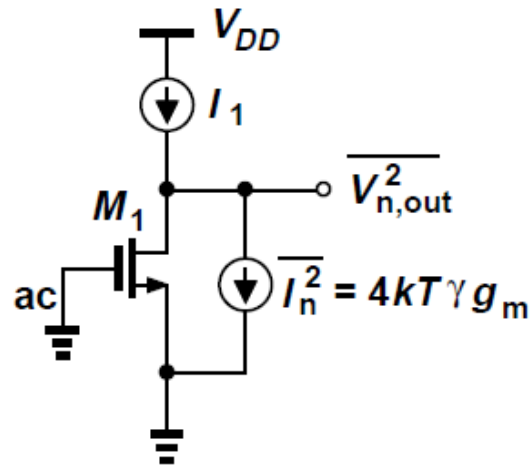
- A MOS tranzisztorok által generált zaj legjelentősebb fajtája szintén termikus zaj, mely a csatornában képződik.
- Nagy csatornahosszúságok esetén a szaturációban működő MOS eszközök csatornájában keletkező zaj modellezhető egy a drain és a source terminálok közé kapcsolt áramforrással, aminek a spektruma:

$$\overline{I_n^2} = 4kT\gamma g_m$$

- A γ együttható (ami nem azonos a bulk hatást reprezentáló együtthatóval) $2/3$ nagy csatornahosszúságú eszközök esetén, de nagyobb szubmikronos FET-eknél.
- Ökölszabályként feltételezhetjük, hogy $\gamma = 1$.



MOSFET termikus zaja: példa



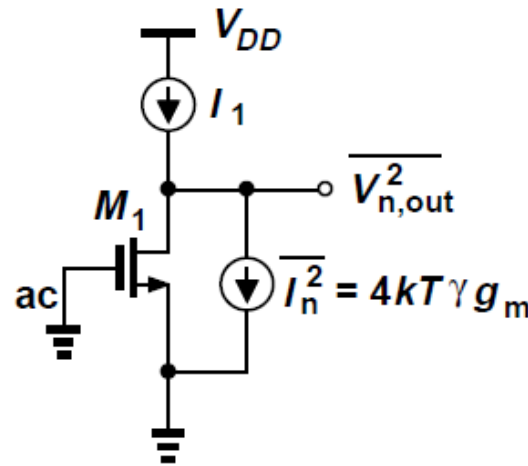
- A kimeneten mért zaj akkor maximális, ha a tranzisztor csak a saját kimeneti impedanciáját látja, vagyis ha a terhelés egy ideális áramgenerátor.
- A kimeneti zaj spektruma a következő:

$$S_{out}(f) = S_{in}(f)|H(f)|^2$$

$$\overline{V_n^2} = \overline{I_n^2} r_O^2$$

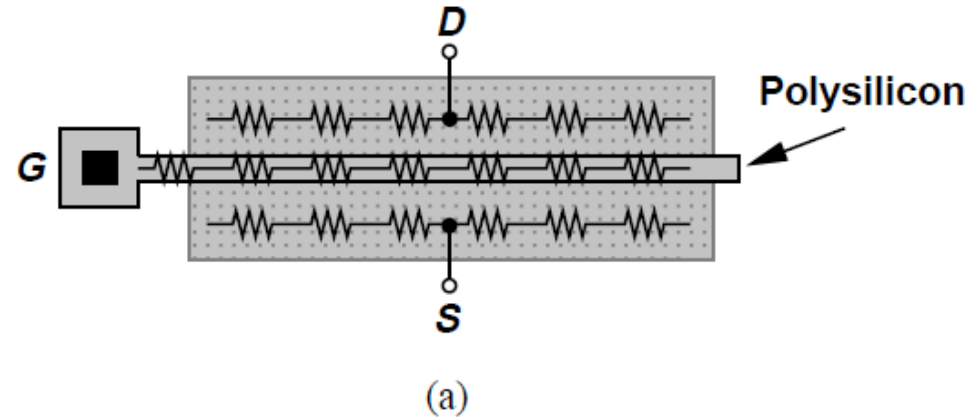
$$= (4kT\gamma g_m) r_O^2$$

MOSFET termikus zaja: példa



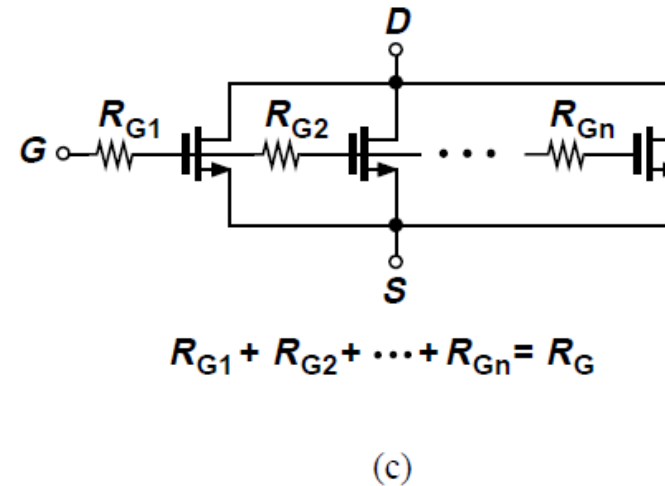
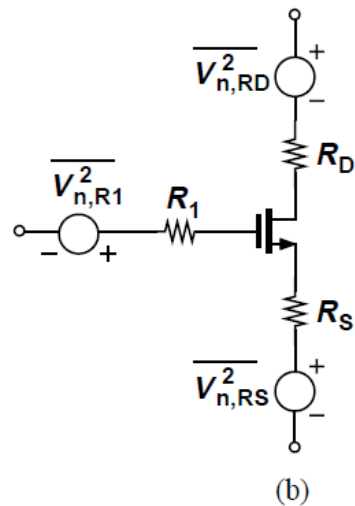
- Egy MOS tranzisztor zaj árama csökken ha a transzkonduktanciája csökken.
- A kimeneten mérhető zaj független a bemeneti terminál feszültség szintjétől, mert a bemenetet nullára állítjuk a zaj számításakor.
- A r_o kimeneti ellenállás nem generál zajt, mert az nem egy valós fizikai ellenállás.

MOSFET termikus zaja



- Egy MOSFET rezisztív részei véges ellenállással rendelkeznek és termikus zajt generálnak. [(a) ábra]
- Egy széles tranzisztor esetén a source és a drain ellenállás elhanyagolható, míg az elosztott gate ellenállás számottevővé válhat.

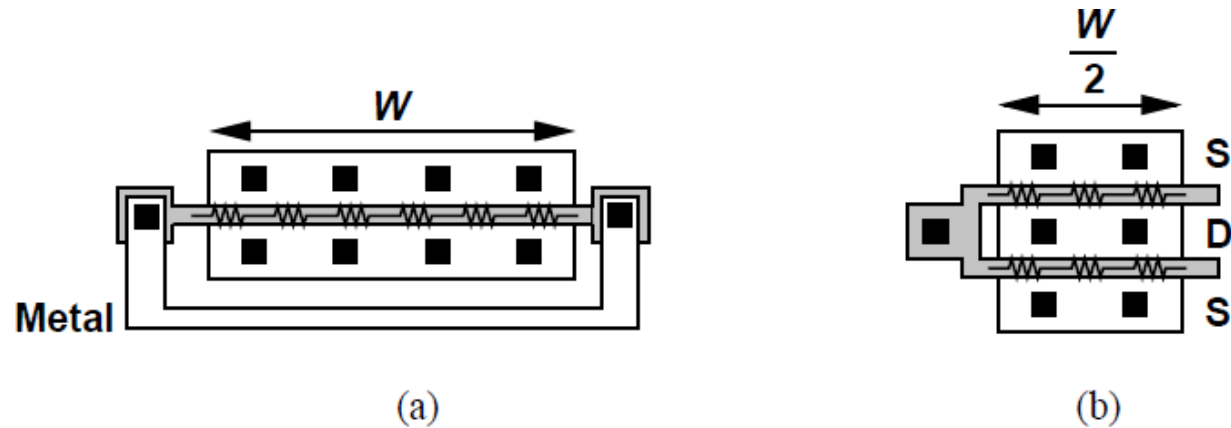
MOSFET termikus zaja



- A zaj modellben [(b) ábra] a koncentrált R_1 ellenállás reprezentálja az elosztott gate ellenállást.
- Az elosztott struktúrában [(c) ábra] a bal oldalhoz közeli egységtranzisztorok csak az R_G által generált zaj töredékét látják, míg a jobb oldaliak majdnem a teljes R_G zaját látják.
- Bebizonyítható, hogy $R_1 = R_G/3$ és ezért a gate ellenállás által generált zaj:

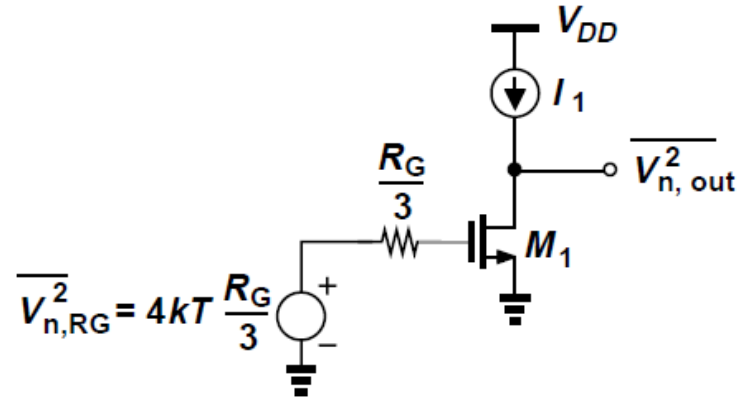
$$\overline{V_{nRG}^2} = 4kT R_G/3$$

MOSFET termikus zaja



- R_G hatása a megfelelő layout kialakításával csökkenthető.
- Az (a) ábrán a gate két végét egy fém vonal köti össze a negyedére csökkentve annak ellenállását
- Egy másik lehetőség ha a tranzisztort több gate-es változatban valósítjuk meg, ahogy a (b) ábra mutatja. Így mindegyik gate “finger” ellenállása $R_G/2$, tehát az eredő ellenállás $R_G/4$.

MOSFET termikus zaja: példa



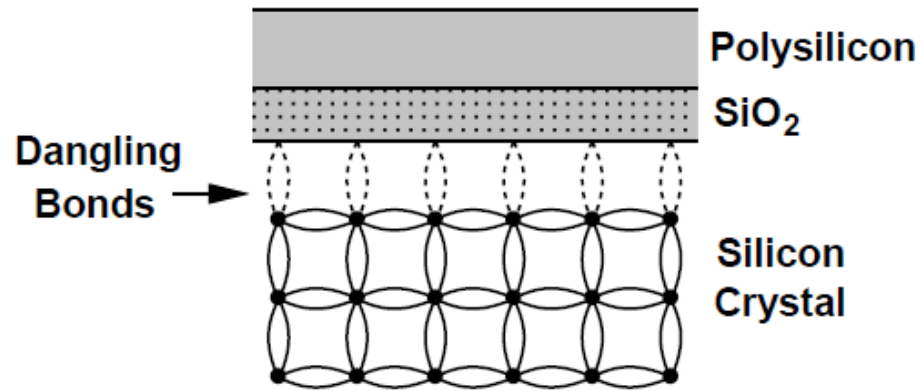
- Ha a teljes elosztott gate ellenállás R_G , akkor az azáltal okozott kimeneti zaj a következő:

$$\overline{V_{n,out}^2} = 4kT \frac{R_G}{3} (g_m r_O)^2$$

- Ahhoz, hogy a gate ellenállás zaja elhanyagolható legyen biztosítanunk kell, hogy:

$$\frac{R_G}{3} \ll \frac{\gamma}{g_m}$$

Flicker zaj



- A szilícium és a gate oxid határfelületén sok szabad kötés található, amik extra megengedhető energiaállapotokat eredményeznek.
- A határfelületen áramló töltéshordozók véletlenszerűen “csapdába esnek”, majd “kiszabadulnak” ezek miatt az energiaállapotok miatt, ami „flicker” zajt eredményez a drain áramban.
- Az csapdaállapotokon kívül más kisebb mechanizmusok is generálhatnak flicker zajt.

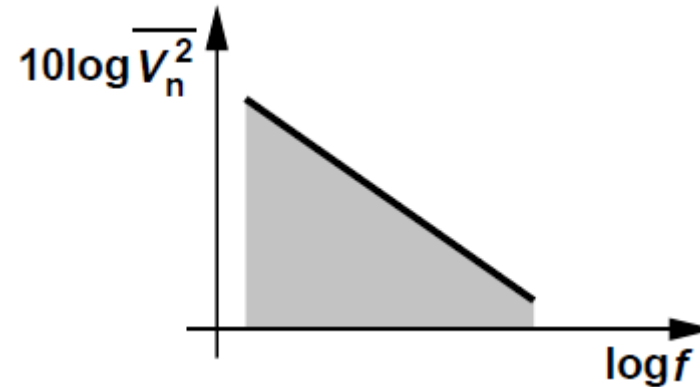
Flicker zaj

- A flicker zaj átlagos teljesítménye nehezen megjósolható.
- Mértéke többek között az oxid-szilícium határfelület tisztaságától függ és CMOS technológiáról technológiára változik.
- A flicker zaj könnyebben modellezhető egy a gate-tel sorba kötött feszültségforrással. Értéke szaturációs tartományban közelítőleg:

$$\overline{V_n^2} = \frac{K}{C_{ox}WL} \cdot \frac{1}{f}$$

- K egy technológiafüggő állandó, ami nagyságrendileg $10^{-25} \text{ V}^2\text{F}$.

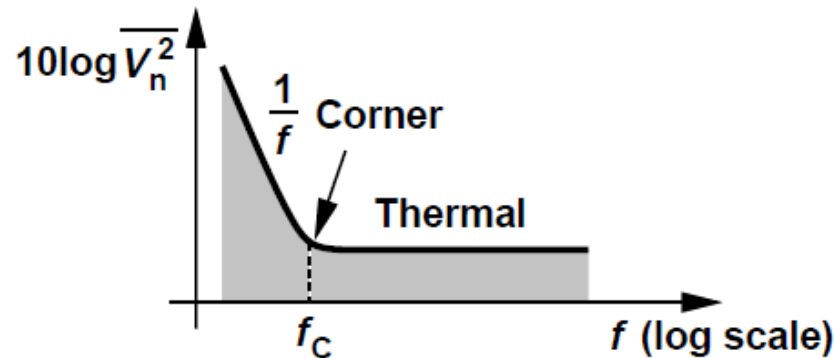
Flicker zaj



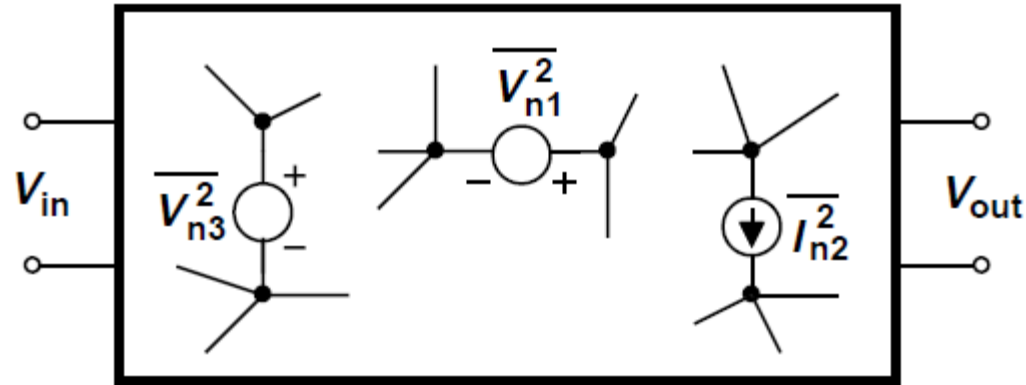
- A zaj spektruma a frekvenciával fordítottan arányos
 - A “csapdába ejtés-elengedés” mechanizmusa alacsony frekvencián gyakoribb.
- A flicker zajt „1/f” zajnak is nevezik.
- Csökkentésének érdekében az eszköz területeket növelni kell.
- Általánosan igaz, hogy a pMOS tranzisztorok kisebb 1/f zajt generálnak, mint az nMOS-ok.
 - A lyukak egy “eltemetett” csatornában mozognak, valamekkora távolságra az oxid-szilícium határfelülelettől.

A flicker zaj corner frekvenciája

- Alacsony frekvenciákon a flicker zaj teljesítménye végtelenhez közelít.
- Alacsony értékek esetén a flicker zaj megkülönböztethetlenné válik a termikus drifttől.
 - Azok a zajkomponensek, melyek a jeltartomány legalacsonyabb frekvenciájánál kisebb frekvencián vannak nem terhelik jelentősen a jelet.
- A termikus és a flicker zaj találkozási pontja a spektrumban az úgynevezett “corner frekvencia”.

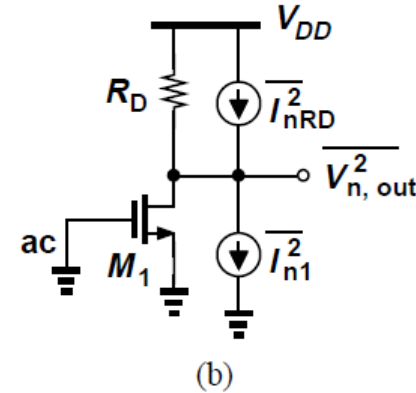
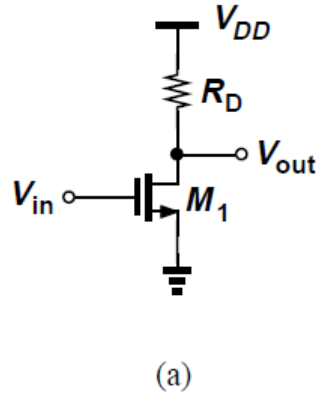


A zaj reprezentálása áramkörökben



- Hogy megtaláljuk a kimeneti zajt a bemenetet nullára állítjuk és az áramköri zajforrások által okozott teljes kimeneti zaj kiszámítjuk.
- Így mérik a zajt laboratóriumokban és szimulációkban is.

A zaj reprezentálása áramkörökben: példa



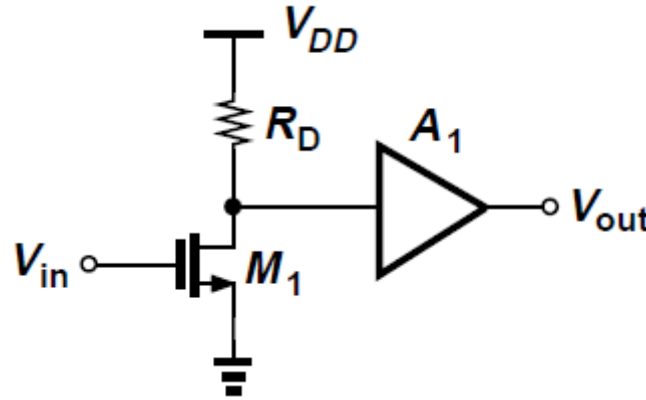
- Számítsuk ki a teljes kimeneti zaját a common source fokozatnak! [(a) ábra]
- Kövessük az előzőekben bemutatott zaj analízis lépéseit.
- M_1 termikus és flicker zaját és R_D termikus zaját egy-egy áramgenerátor reprezentálja. [(b) ábra]

$$\overline{I_{n,th}^2} = 4kT\gamma g_m \quad \overline{I_{n,1/f}^2} = K g_m^2 / (C_{ox} W L f) \quad \overline{I_{n,RD}^2} = 4kT / R_D$$

- A kimeneti zajfeszültség kiszámításához az egyes egységfrekvenciatartománybeli zajfeszültségeket négyzetesen (teljesítménymennyiségként kezelve) összegezzük.

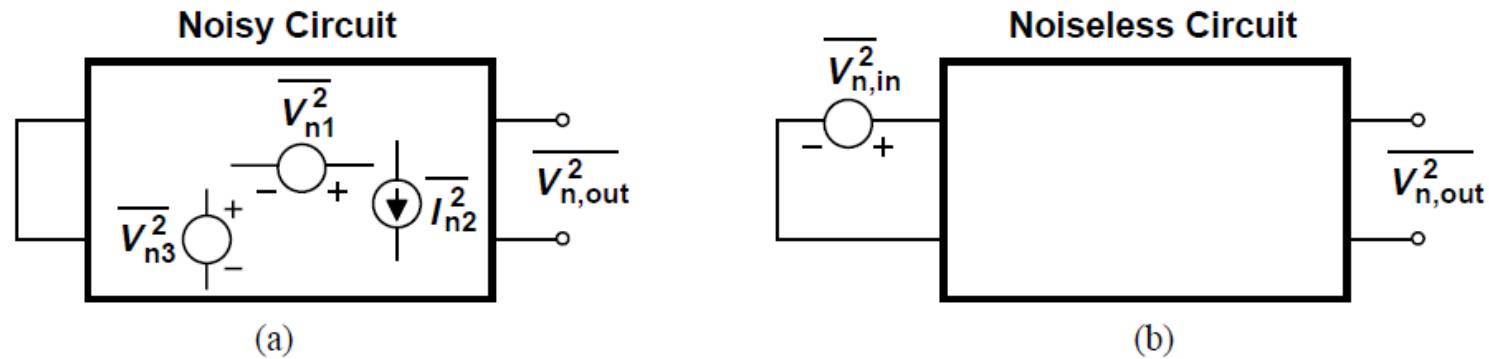
$$\overline{V_{n,out}^2} = \left(4kT\gamma g_m + \frac{K}{C_{ox} W L} \cdot \frac{1}{f} \cdot g_m^2 + \frac{4kT}{R_D} \right) R_D^2$$

Bemenetre redukált zaj



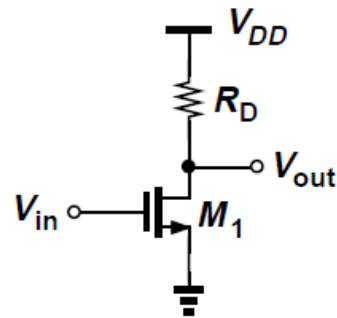
- A különböző áramkörök kimeneti zaja nem hasonlítható össze, mivel az függ az egyes áramkörök erősítésétől.
- A fenti ábrán a CS fokozatot kiegészítettük egy zajmentes erősítővel, aminek az erősítése A_1 . Így a kimeneten megjelenő zaj A_1^2 -tel szorzódik.
- Ez azt jelentheti, hogy az áramkör annál zajosabb minél nagyobb az erősítése. Ez azonban nem igaz, mert a jelszint is arányosan megnövekedett és a jel-zaj viszony a kimeneten független A_1 -től.

Bemenetre redukált zaj

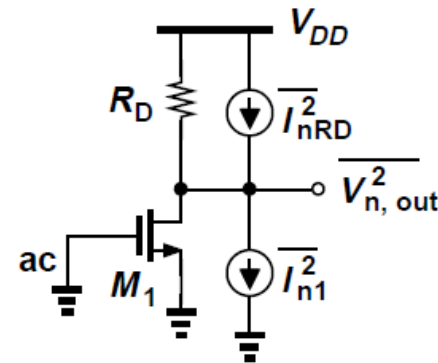


- A bemenetre redukált zaj reprezentálja az áramkörben lévő össze zajforrás hatását egyetlen $\overline{V_{n,in}^2}$ zajforrás segítségével a bemeneten, melynek értéke akkora, hogy a kimeneti zaj a két ábrán megegyezzen.
- Ha az erősítés A_v akkor igaz, hogy:
$$\overline{V_{n,out}^2} = A_v^2 \overline{V_{n,in}^2}$$
- Ebben az egyszerű esetben a bemenetre redukált zaj nem más, mint a kimeneti zaj elosztva az erősítés négyzetével.

Bemenetre redukált zaj: példa



(a)



(b)

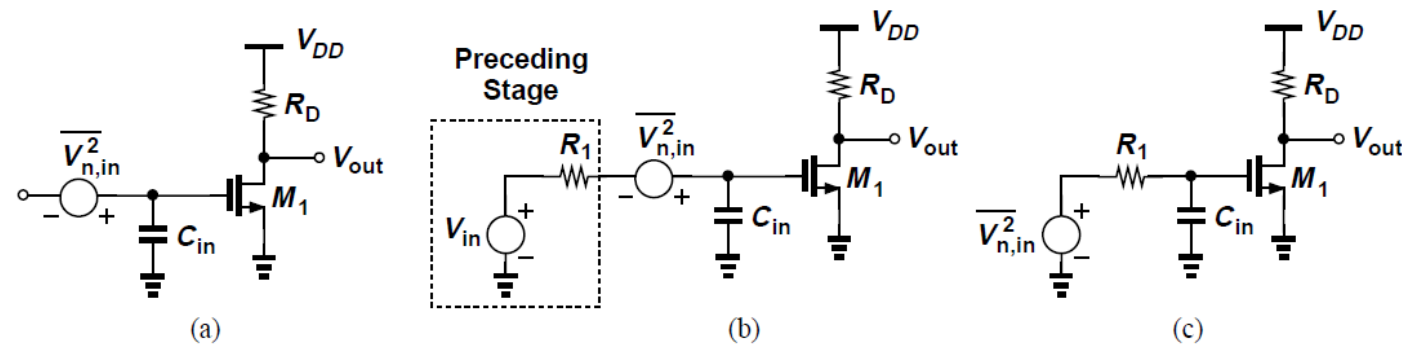
- Egy egyszerű common source fokozat bemenetre redukált zaja a következő:

$$\begin{aligned}\overline{V_{n,in}^2} &= \frac{\overline{V_{n,out}^2}}{A_v^2} \\ &= \left(4kT\gamma g_m + \frac{K}{C_{ox}WL} \cdot \frac{1}{f} \cdot g_m^2 + \frac{4kT}{R_D} \right) R_D^2 \frac{1}{g_m^2 R_D^2} \\ &= 4kT \frac{\gamma}{g_m} + \frac{K}{C_{ox}WL} \cdot \frac{1}{f} + \frac{4kT}{g_m^2 R_D}\end{aligned}$$

- Az első és a harmadik tag tekinthető az ekvivalens R_T ellenállás termikus zajának, így az ekvivalens bemenetre redukált zaj nem más, mint $4kTR_T$.

Bemenetre redukált zaj

- Egyetlen a bemenettel sorba kötött feszültségforrás nem teljes reprezentációja a bemenetre redukált zajnak, ha az áramkör véges bemeneti ellenállással rendelkezik, illetve véges kimeneti impedanciájú forrással hajtjuk.
- CS fokozat esetén a bemenetre redukált zaj független az azt megelőző fokozatoktól.

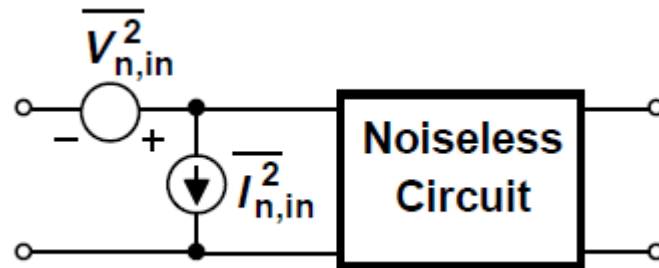


- Ha az előző fokozatot egy R_1 kimenő impedanciájú Thevenin helyettesítőképpel helyettesítjük, a kimeneti zaj a feszültségosztás miatt:

$$\begin{aligned}\overline{V_{n,out}^2} &= \overline{V_{n,in}^2} \left| \frac{1}{R_1 C_{in} j\omega + 1} \right|^2 (g_m R_D)^2 \\ &= \frac{4kT\gamma g_m R_D^2}{R_1^2 C_{in}^2 \omega^2 + 1}\end{aligned}$$

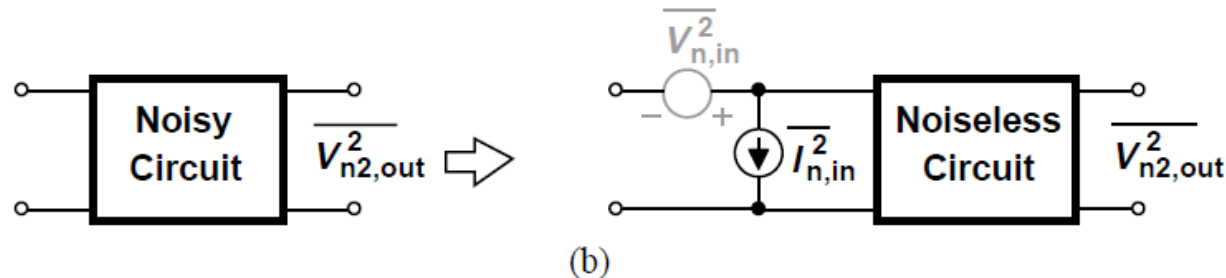
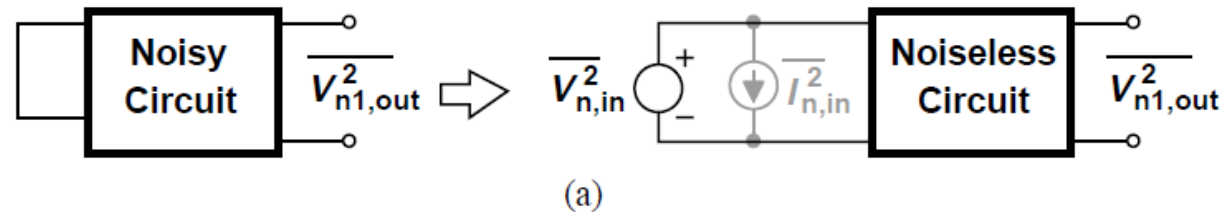
Bemenetre redukált zaj

- Az előző eredmény nem helyes, mert az M_1 hatására a kimeneten létrejövő zaj R_1 növelésével nem csökken.
- Hogy megoldjuk a problémát modellezzük a bemenetre redukált zajt egy soros feszültséggenerátorral és egy párhuzamos áramgenerátorral egyaránt. Így ha az előző fokozat kimeneti impedanciája nagy értéket feltételez, csökkentve ezzel $\overline{V_{n,in}^2}$ hatását, a zaj áram átfolyik a véges impedancián és zajt okoz a kimeneten.
- Bebizonyítható, $\overline{V_{n,in}^2}$ és $\overline{I_{n,in}^2}$ jelenléte szükséges és elégséges feltétele a zaj megfelelő reprezentálásának bármely lineáris kétkapú esetén.



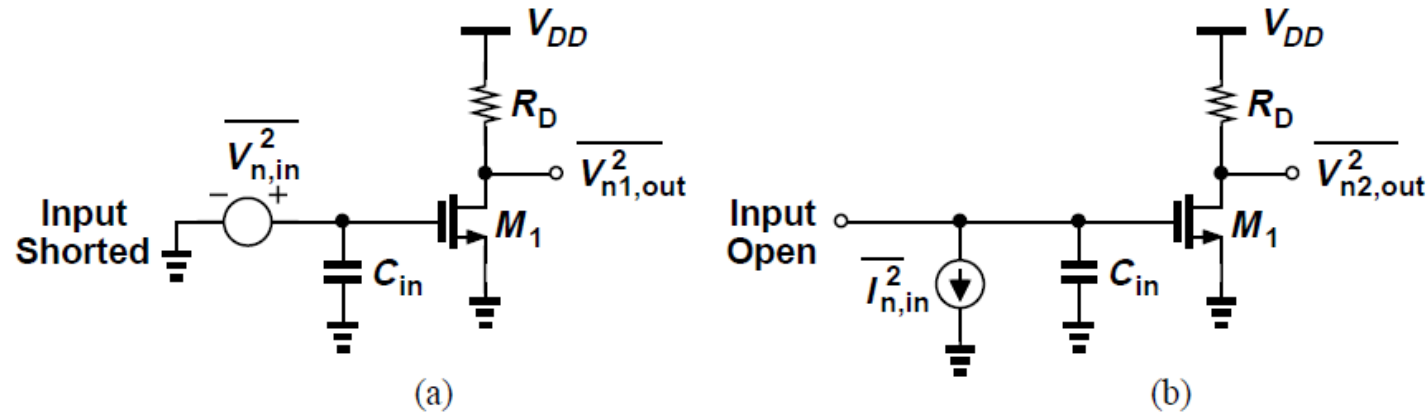
Bemenetre redukált zaj

- Hogy kiszámítsuk $\overline{V_{n,in}^2}$ és $\overline{I_{n,in}^2}$ értékét két extrém esetet vizsgálunk meg. Nulla és végtelen forrás impedanciákat.



- Ha a forrás impedanciája nulla [(a) ábra] $\overline{I_{n,in}^2}$ átfolyik $\overline{V_{n,in}^2}$ -en és ezért nincs hatással a kimenetre, tehát a kimeneten mérhető zaj kizárólag $\overline{V_{n,in}^2}$ -ből származik.
- Ha a bemenet szakadás [(b) ábra], akkor $\overline{V_{n,in}^2}$ -nek nincs hatása és a kimeneti zajt csak $\overline{I_{n,in}^2}$ okozza.

Bemenetre redukált zaj: példa



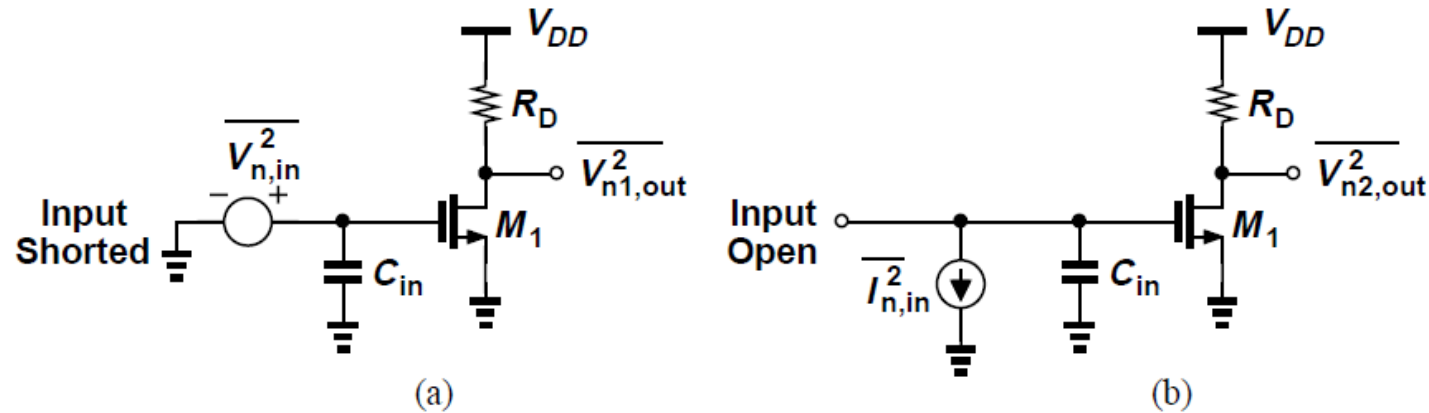
- Az (a) ábrán lévő áramkör esetén a bemenetre redukált zajfeszültség egyszerűen:

$$\overline{V_{n,in}^2} = 4kT \frac{\gamma}{g_m} + \frac{4kT}{g_m^2 R_D}$$

- Hogy megtaláljuk a bemenetre redukált zaj áramot a bemenetet szakadással helyettesítjük és felírjuk a kimeneti zajt $\overline{I_{n,in}^2}$ -nel kifejezve.
- A zaj áram keresztül folyik C_{in} -en és a kimeneti zaj feszültség:

$$\overline{V_{n2,out}^2} = \overline{I_{n,in}^2} \left(\frac{1}{C_{in}\omega} \right)^2 g_m^2 R_D^2$$

Bemenetre redukált zaj: példa



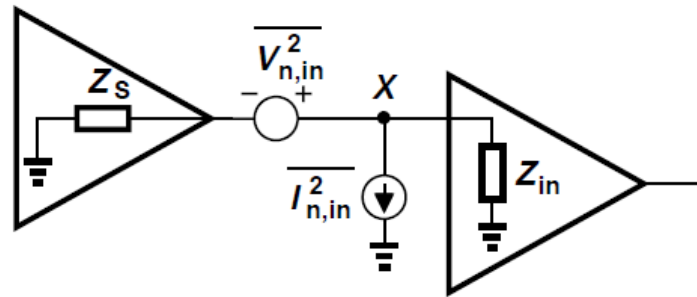
- Ennek egyenlőnek kell lenni a zajos áramkör kimenetével amikor a bemenet szakadás (b ábra)

$$\overline{V_{n2,out}^2} = \left(4kT \gamma g_m + \frac{4kT}{R_D} \right) R_D^2$$

- Így:

$$\overline{I_{n,in}^2} = (C_{in}\omega)^2 \frac{4kT}{g_m^2} \left(\gamma g_m + \frac{1}{R_D} \right)$$

Bemenetre redukált zaj



- A bemeneti zaj áram $I_{n,in}$ kis Z_{in} bemeneti impedancia esetén válik jelentőssé.
- A fenti ábrán Z_S jelöli az előző fokozat kimeneti impedanciáját. A következő fokozat teljes bemeneti zajfeszültsége az X ponton:

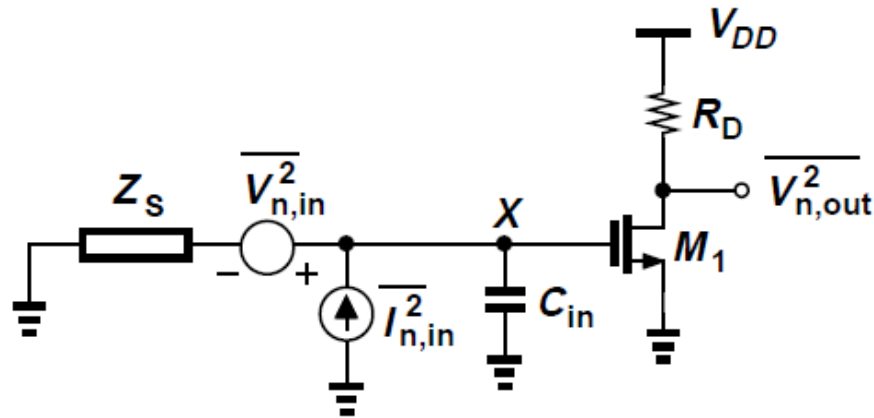
$$V_{n,X} = \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_S} V_{n,in} + \frac{Z_{in} Z_S}{Z_{in} + Z_S} I_{n,in}$$

- Ha $\overline{I_{n,in}^2} |Z_S|^2 \ll \overline{V_{n,in}^2}$, akkor $I_{n,in}$ hatása elhanyagolható.
- Ezért a bemenetre redukált zaj elhanyagolható, ha:

$$|Z_S|^2 \ll \frac{\overline{V_{n,in}^2}}{\overline{I_{n,in}^2}}$$

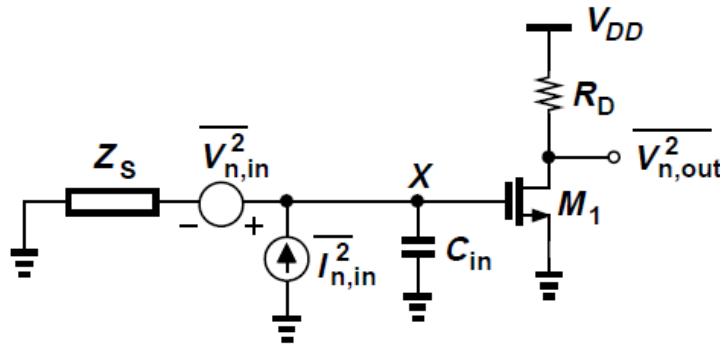
Bemenetre redukált zaj: korreláció

- A bemenetre redukált zajfeszültségek és áramok korrelálhatnak.
- A zaj számításánál ezt figyelembe kell venni.
- Egy feszültség és egy áramgenerátor együttes használata nem eredményezi azt, hogy a zajt “kétszer számoljuk”.



- Bebizonyítható, hogy a kimeneti zaj akkor helyes bármilyen forrásimpedancia esetén, ha $\overline{V_{n,in}^2}$ és $\overline{I_{n,in}^2}$ egyaránt jelen van.

Bemenetre redukált zaj: korreláció

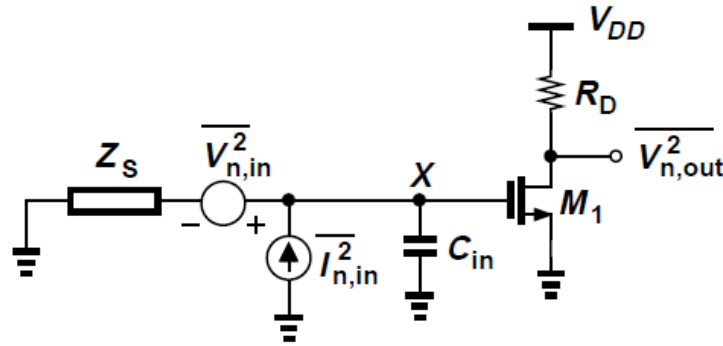


- Feltételezve, hogy Z_S zajtalan, kiszámítjuk az M_1 gate-jén mérhető, $\overline{V_{n,in}^2}$ és $\overline{I_{n,in}^2}$ okozta teljes zajfeszültséget.
- Teljesítményekre nem alkalmazható a szuperpozíció, mert korrelálnak, feszültségekre és áramokra azonban igen, mert az áramkör lineáris és időinvariáns.
- Ezért, ha $V_{n,M1}$ jelöli M_1 gate-re redukált zajfeszültségét és $V_{n,RD}$ R_D zajfeszültségét, akkor:

$$V_{n,in} = V_{n,M1} + \frac{1}{g_m R_D} V_{n,RD}$$

$$I_{n,in} = C_{in} s V_{n,M1} + \frac{C_{in} s}{g_m R_D} V_{n,RD}$$

Bemenetre redukált zaj: korreláció



- Behelyettesítünk $V_{n,in}$ és $I_{n,in}$ helyére:

$$\begin{aligned} V_{n,X} &= \frac{1}{Z_S C_{in} s + 1} \left[V_{n,M1} + \frac{1}{g_m R_D} V_{n,RD} + C_{in} s Z_S \left(V_{n,M1} + \frac{1}{g_m R_D} V_{n,RD} \right) \right] \\ &= V_{n,M1} + \frac{1}{g_m R_D} V_{n,RD} \end{aligned}$$

- $V_{n,X}$ független Z_S -től és C_{in} -től. Ebből adódóan:

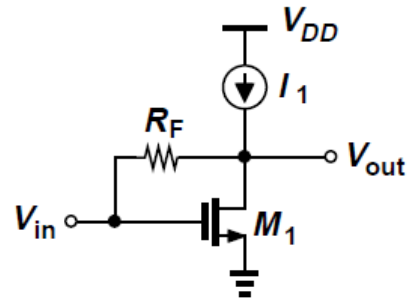
$$\begin{aligned} \overline{V_{n,out}^2} &= g_m^2 R_D^2 \overline{V_{n,X}^2} \\ &= 4kT \left(\gamma g_m + \frac{1}{R_D} \right) R_D^2 \end{aligned}$$

- $V_{n,in}$ és $I_{n,in}$ együttes használata nem kétszerezi meg a kimeneti zajt.

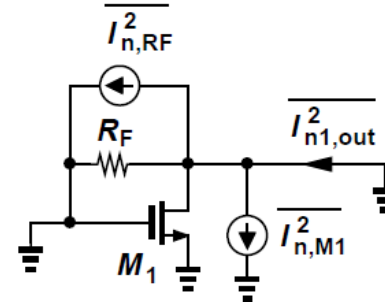
Bemenetre redukált zaj: korreláció

- Néhány esetben egyszerűbb a kimeneti zaj áram kiszámítása rövidzártérhelés mellett.
- Ezt az áramot, ha megszorozzuk a kimeneti impedanciával megkapjuk a kimeneti zajfeszültséget vagy, ha elosztjuk a megfelelő erősítéssel megkapjuk a bemenetre redukált mennyiségeket.

Bemenetre redukált zaj: korreláció (példa)



(a)



(b)

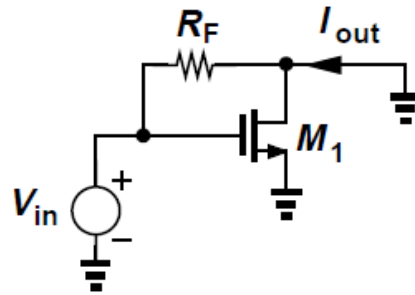
- Határozzuk meg a bemenetre redukált zajfeszültséget és áramot. Tételezzük fel, hogy I_1 zajmentes és $\lambda = 0$.
- Hogy kiszámoljuk a bemenetre redukált zajfeszültséget rövidre zárjuk a bemenetet [(b) ábra]. Itt az is lehetséges, hogy a kimenetet rövidre zárjuk, így:

$$\overline{I_{n1,out}^2} = \frac{4kT}{R_F} + 4kT\gamma g_m$$

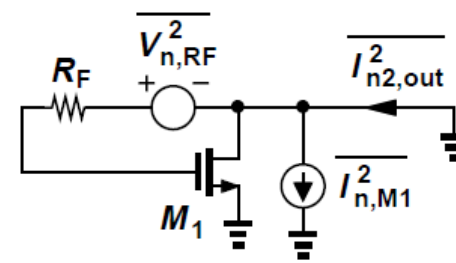
- A rövidre zárt bemenet miatt a kimeneti impedancia egyszerűen R_F , ezért:

$$\overline{V_{n1,out}^2} = \left(\frac{4kT}{R_F} + 4kT\gamma g_m \right) R_F^2$$

Bemenetre redukált zaj: korreláció (példa)



(c)



(d)

- A bemenetre redukált zajfeszültség meghatározható ha az előző eredményt elosztjuk a feszültségerősítéssel, vagy $\overline{I_{n1,out}^2}$ -ot G_m^2 -tel.

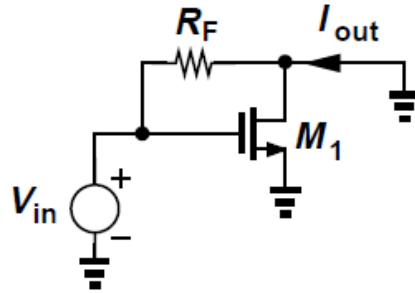
- Ahogy a (c) ábra mutatja:

$$\begin{aligned} G_m &= \frac{I_{out}}{V_{in}} \\ &= g_m - \frac{1}{R_F} \end{aligned}$$

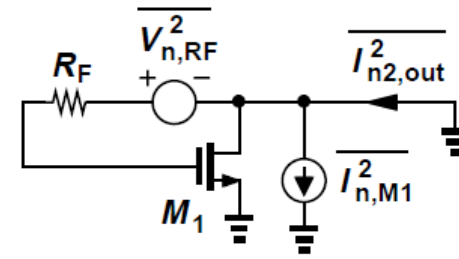
- Ezért:

$$\overline{V_{n,in}^2} = \frac{\frac{4kT}{R_F} + 4kT\gamma g_m}{\left(g_m - \frac{1}{R_F}\right)^2}$$

Bemenetre redukált zaj: korreláció (példa)



(c)



(d)

- Hogy megtaláljuk a bemenetre redukált zaj áramot [(d) ábra] először kifejezzük a kimeneti zaj áramot úgy, hogy a bemeneten szakadás van: $\overline{I_{n2,out}^2} = 4kT R_F g_m^2 + 4kT \gamma g_m$

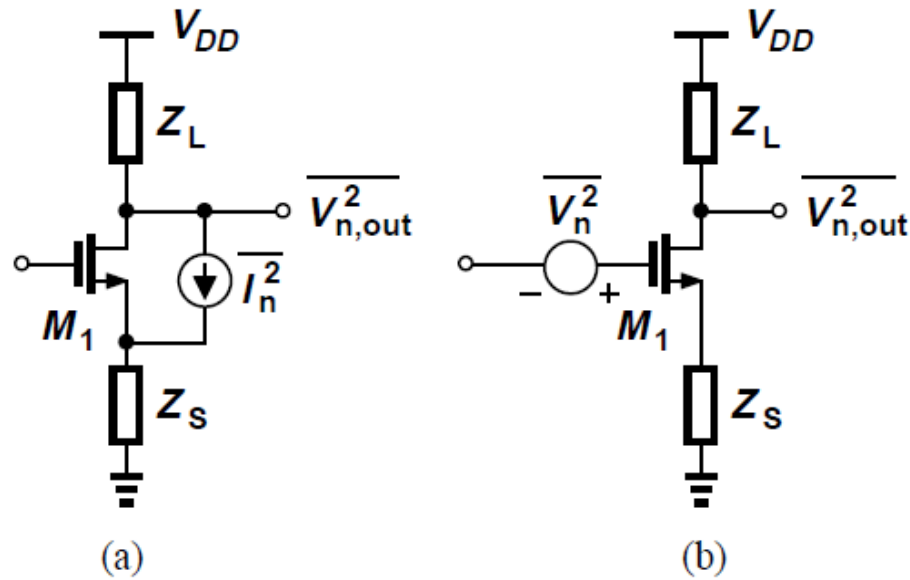
- Ezt követően meg kell keresnünk az áramkör áramerősítését [(c) ábra]

- Mivel $V_{GS} = I_{in} R_F$ és $I_D = g_m I_{in} R_F$:
$$I_{out} = g_m R_F I_{in} - I_{in}$$
$$= (g_m R_F - 1) I_{in}$$

- Ezért:

$$\overline{I_{n,in}^2} = \frac{4kT R_F g_m^2 + 4kT \gamma g_m}{(g_m R_F - 1)^2}$$

Zaj egyfokozatú erősítőkből: lemma



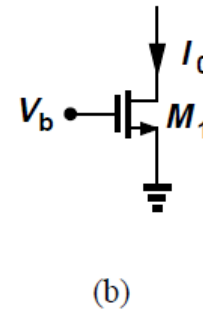
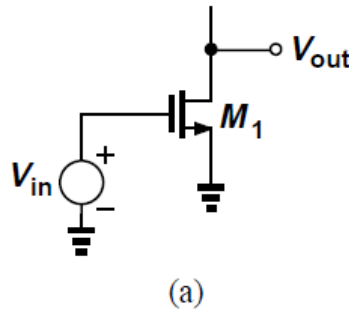
- Lemma: Az (a) és (b) ábrán lévő áramkörök ekvivalensek alacsony frekvencián, ha $\overline{V_n^2} = \overline{I_n^2} / g_m^2$ és az áramköröket véges impedanciával hajtjuk.
- A zajforrás átalakítható drain-source áramból soros gate feszültséggé tetszőleges Z_S érték esetén.

Common source fokozat

- Egy előző példa alapján a CS fokozat bemenetre redukált zajfeszültsége:

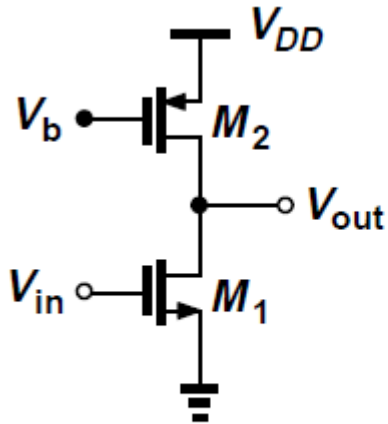
$$\overline{V_{n,in}^2} = 4kT \left(\frac{\gamma}{g_m} + \frac{1}{g_m^2 R_D} \right) + \frac{K}{C_{ox} W L} \frac{1}{f}$$

- A fenti kifejezésben $4kT\gamma/g_m$ a termikus zaj áram a gate-tel sorba kötött feszültséggel kifejezve.

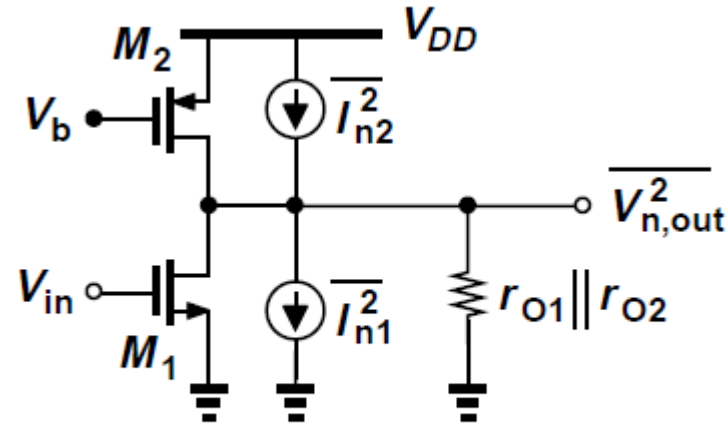


- Hogy csökkentsük a bemenetre redukált zajfeszültséget, a transzkonduktanciát maximalizálnunk kell, ha a tranzisztort feszültségerősítésre használjuk [(a) ábra], viszont minimalizálni kell, ha áramgenerátorként alkalmazzuk.

Common-source fokozat: példa



(a)

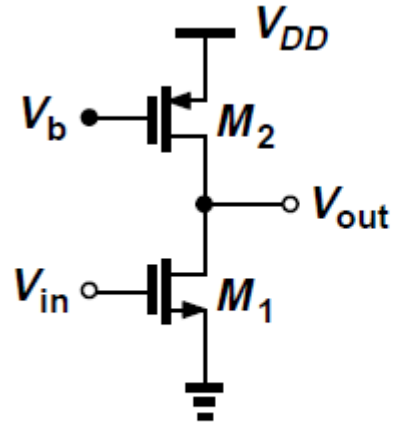


(b)

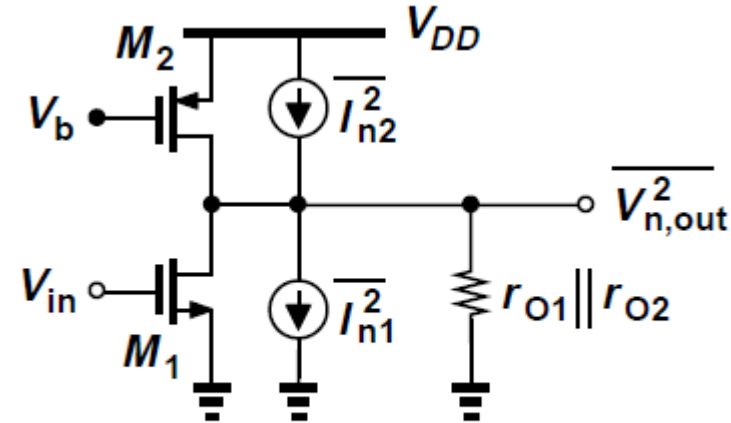
- Határozzuk meg a bemenetre redukált termikus zajt és a teljes kimeneti zajt C_L terhelés esetén!
- Ha mindkét tranzisztor termikus zaját áramgenerátorral reprezentáljuk és korrelálatlannak tekintjük:

$$\overline{V_{n,out}^2} = 4kT(\gamma g_{m1} + \gamma g_{m2})(r_{O1} || r_{O2})^2$$

Common-source fokozat: példa



(a)



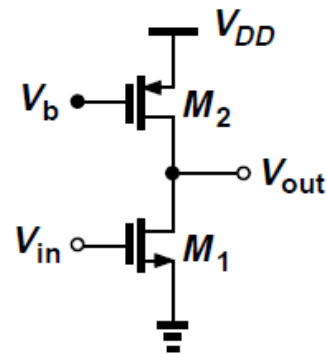
(b)

- Mivel a feszültségerősítés $g_{m1}(r_{O1}||r_{O2})$, az M_1 gate-jére redukált teljes zajfeszültség:

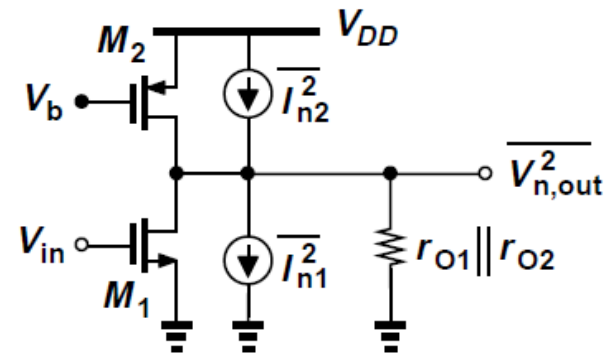
$$\begin{aligned}\overline{V_{n,in}^2} &= 4kT(\gamma g_{m1} + \gamma g_{m2}) \frac{1}{g_{m1}^2} \\ &= 4kT\gamma \left(\frac{1}{g_{m1}} + \frac{g_{m2}}{g_{m1}^2} \right).\end{aligned}$$

- Tehát g_{m2} -t minimalizálnunk kell, mert áramgenerátorként szolgál, nem transzkonduktanciaként.

Common-source fokozat: példa



(a)



(b)

- A teljes kimeneti zaj: $\overline{V_{n,out,tot}^2} = \int_0^\infty 4kT\gamma(g_{m1} + g_{m2})(r_{O1} \parallel r_{O2})^2 \frac{df}{1 + (r_{O1} \parallel r_{O2})^2 C_L^2 (2\pi f)^2}$

$$\overline{V_{n,out,tot}^2} = \gamma(g_{m1} + g_{m2})(r_{O1} \parallel r_{O2}) \frac{kT}{C_L}$$

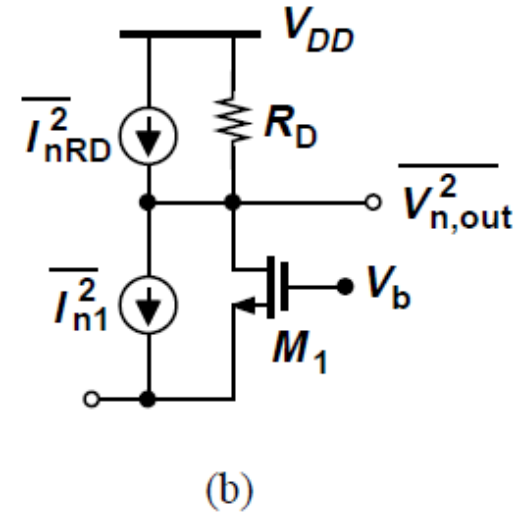
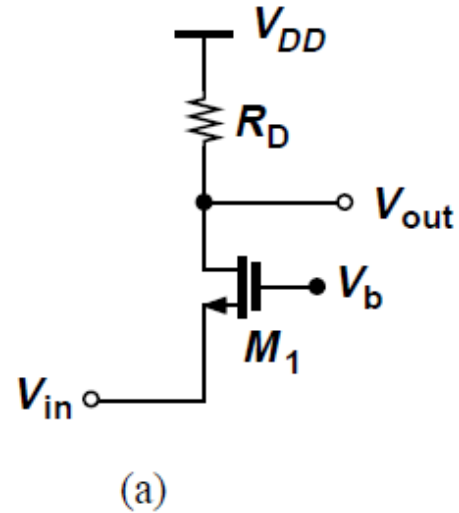
- Egy alacsony frekvenciás szinuszos V_m amplitúdójú bemeneti jel esetén a kimeneti jel amplitúdója:

$$g_{m1}(r_{O1} \parallel r_{O2})V_m$$

- Tehát a kimeneti SNR:

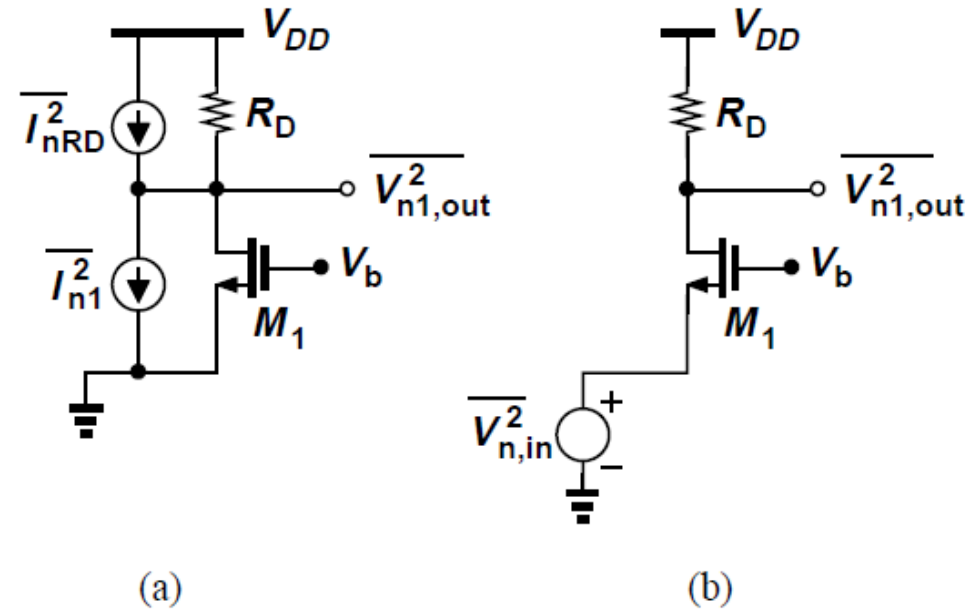
$$\begin{aligned} SNR_{out} &= \left[\frac{g_{m1}(r_{O1} \parallel r_{O2})V_m}{\sqrt{2}} \right]^2 \cdot \frac{1}{\gamma(g_{m1} + g_{m2})(r_{O1} \parallel r_{O2})(kT/C_L)} \\ &= \frac{C_L}{2\gamma kT} \cdot \frac{g_{m1}^2(r_{O1} \parallel r_{O2})}{g_{m1} + g_{m2}} V_m^2. \end{aligned}$$

Common-gate fokozat: termikus zaj



- Elhanyagolva a csatornarövidülést, M_1 és R_D termikus zaját két áramforrással reprezentáljuk [(b) ábra]
- A kis bemeneti impedanciának köszönhetően a bemenetre redukált zaj áram még alacsony frekvenciákon sem elhanyagolható.

Common-gate fokozat: termikus zaj



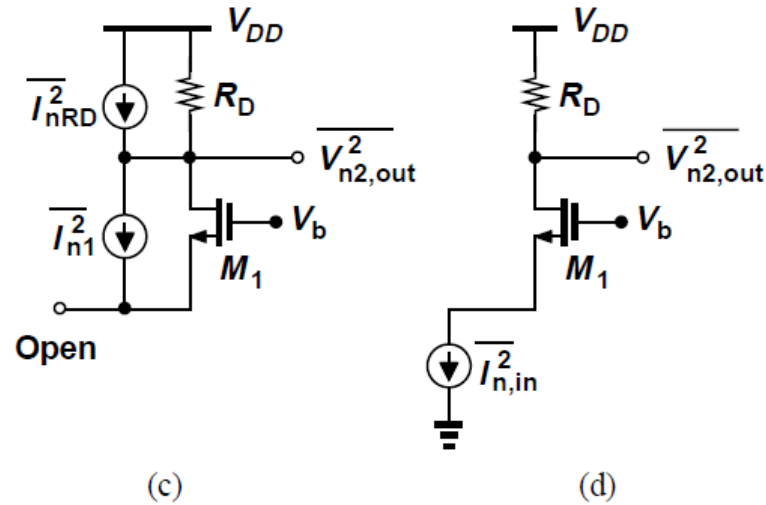
- A bemenetre redukált zajfeszültség kiszámításához rövidre zárjuk a bemenetet és kiszámítjuk a kimeneti zajokat:

$$\left(4kT\gamma g_m + \frac{4kT}{R_D}\right) R_D^2 = \overline{V_{n,in}^2} (g_m + g_{mb})^2 R_D^2$$

- Így a bemenetre redukált zajfeszültség:

$$\overline{V_{n,in}^2} = \frac{4kT(\gamma g_m + 1/R_D)}{(g_m + g_{mb})^2}$$

Common-gate fokozat: termikus zaj

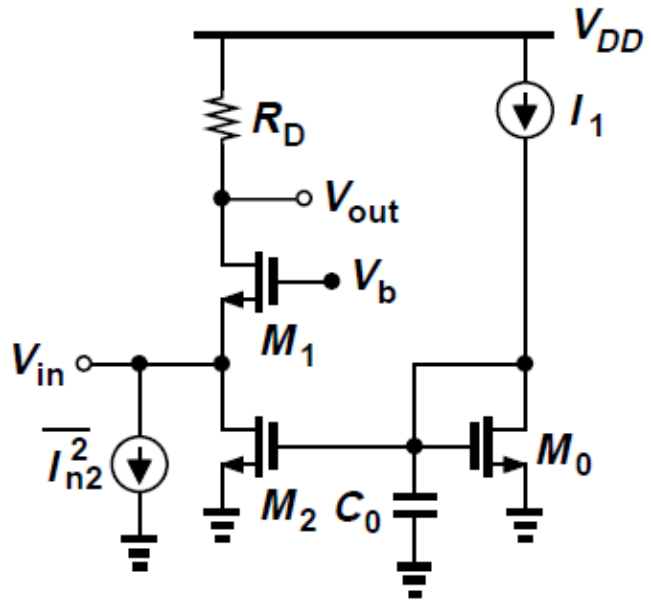


- A bemenetre redukált zaj áram kiszámításához meghatározzuk a kimeneti zajt abban az esetben ha a bemeneten szakadás van.
- I_{n1} nem okoz kimeneti zajt, mert az áramok összege M_1 source kivezetésénél nulla.
- A kimeneti zajfeszültség ezért $4kTR_D$: $\overline{I_{n,in}^2} R_D^2 = 4kTR_D$

- Tehát:

$$\overline{I_{n,in}^2} = \frac{4kT}{R_D}$$

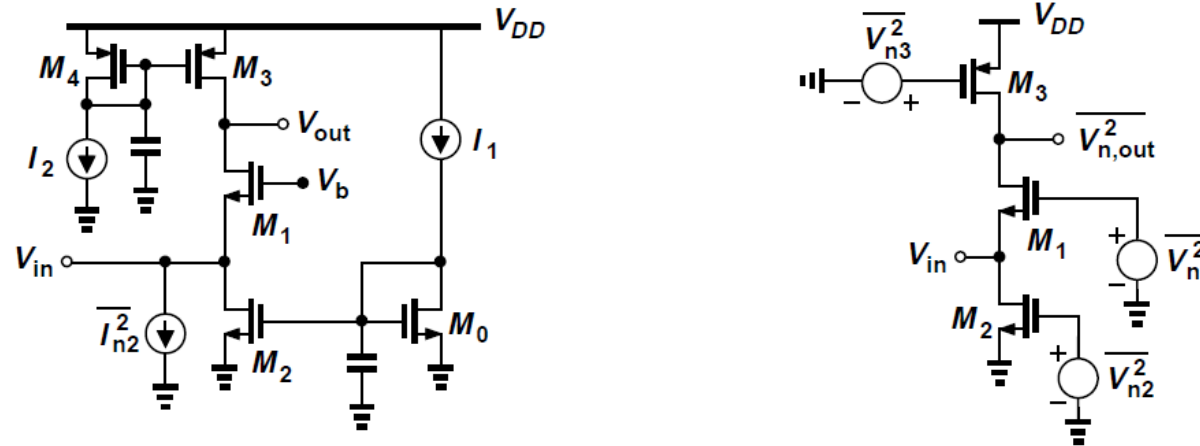
Common-gate fokozat: termikus zaj



- A CG fokozat bias áramforrása is hozzájárul a termikus zajhoz.
- Az áramtükör elrendezés lehetővé teszi, hogy M_1 bias árama I_1 többszöröse legyen.

- Ha a bemenetet rövidre zárjuk M_2 zaja nem járul hozzá a bemenetre redukált zajfeszültséghez.
- Ha a bemenet szakadás $\overline{I_{n2}^2}$ teljes egészében R_D -n és M_1 -en keresztül folyik, ezért $\overline{I_{n2}^2} R_D^2$ kimeneti zajt okoz, így $\overline{I_{n2}^2}$ bemenetre redukált zaj áramot.
- A zajcsökkentés érdekében M_2 transzkonduktanciáját minimalizálni kell, ami a maximális kimeneti swing csökkenését eredményezi.

Common-gate fokozat: flicker zaj

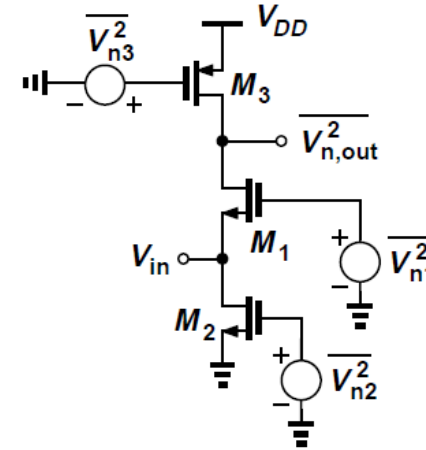
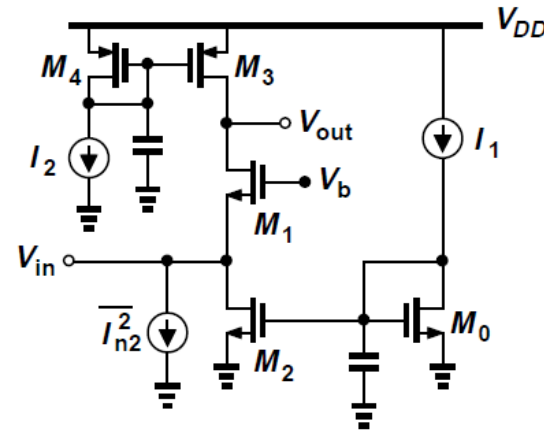


- Hogy meghatározzuk a fenti áramkör bemenetre redukált $1/f$ zajfeszültségét és áramát minden $1/f$ zajforrást egy a gate-tel sorba kötött feszültségforrással modellezzünk. (M_0 és M_4 $1/f$ zaját elhanyagoljuk)
- Ha a kimenetet rövidre zárjuk:

$$\overline{V_{n1,out}^2} = \frac{1}{C_{ox}f} \left[\frac{g_{m1}^2 K_N}{(WL)_1} + \frac{g_{m3}^2 K_P}{(WL)_3} \right] (r_{O1} \parallel r_{O3})^2$$

- K_p és K_N jelöli a pMOS és nMOS eszközök zaj együtthatóját.

Common-gate fokozat: flicker zaj



- A feszültségerősítés közelítve: $(g_{m1} + g_{mb1})(r_{O1} || r_{O3})$

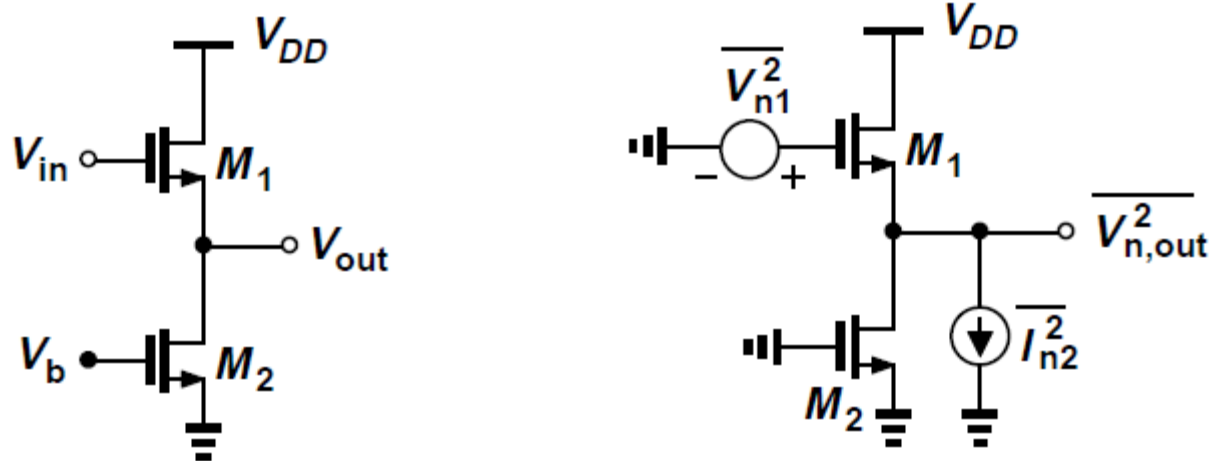
$$\overline{V_{n,in}^2} = \frac{1}{C_{ox}f} \left[\frac{g_{m1}^2 K_N}{(WL)_1} + \frac{g_{m3}^2 K_P}{(WL)_3} \right] \frac{1}{(g_{m1} + g_{mb1})^2}$$

- Ha a bemenet szakadás a kimeneti zaj közelítőleg: $\overline{V_{n2,out}^2} = \frac{1}{C_{ox}f} \left[\frac{g_{m2}^2 K_N}{(WL)_2} + \frac{g_{m3}^2 K_P}{(WL)_3} \right] R_{out}^2$

- Ebből adódóan:

$$\overline{I_{n,in}^2} = \frac{1}{C_{ox}f} \left[\frac{g_{m2}^2 K_N}{(WL)_2} + \frac{g_{m3}^2 K_P}{(WL)_3} \right]$$

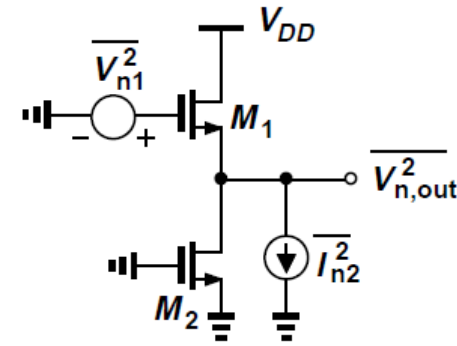
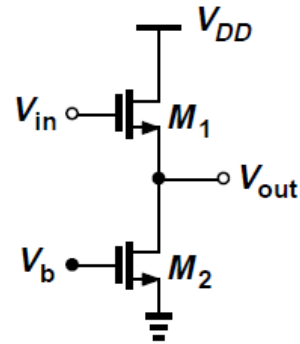
Source követő: termikus zaj



- Mivel a source követő fokozat bemeneti impedanciája nagy, a bemenetre redukált áram zaj elhanyagolható, ha a meghajtó impedancia nem túl nagy.
- A bemenetre redukált zajfeszültség meghatározásához kifejezzük a kimeneti zajt:

$$\overline{V_{n,out}^2}|_{M2} = \overline{I_{n2}^2} \left(\frac{1}{g_{m1}} \parallel \frac{1}{g_{mb1}} \parallel r_{O1} \parallel r_{O2} \right)^2$$

Source követő: termikus zaj



- A feszültségerősítés (lásd korábbi előadás):

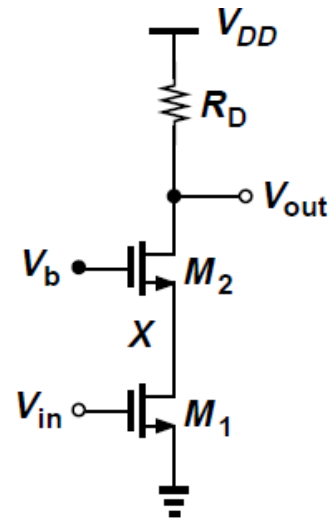
$$A_v = \frac{\frac{1}{g_{mb1}} \parallel r_{O1} \parallel r_{O2}}{\frac{1}{g_{mb1}} \parallel r_{O1} \parallel r_{O2} + \frac{1}{g_{m1}}}$$

- A teljes bemenetre redukált zaj:

$$\begin{aligned} \overline{V_{n,in}^2} &= \overline{V_{n1}^2} + \frac{\overline{V_{n,out}^2}|_{M2}}{A_v^2} \\ &= 4kT\gamma \left(\frac{1}{g_{m1}} + \frac{g_{m2}}{g_{m1}^2} \right) \end{aligned}$$

- Source követők zajt adnak a bemeneti jelhez, miközben a feszültségerősítésük kevesebb, mint egy.

Kaskód fokozat

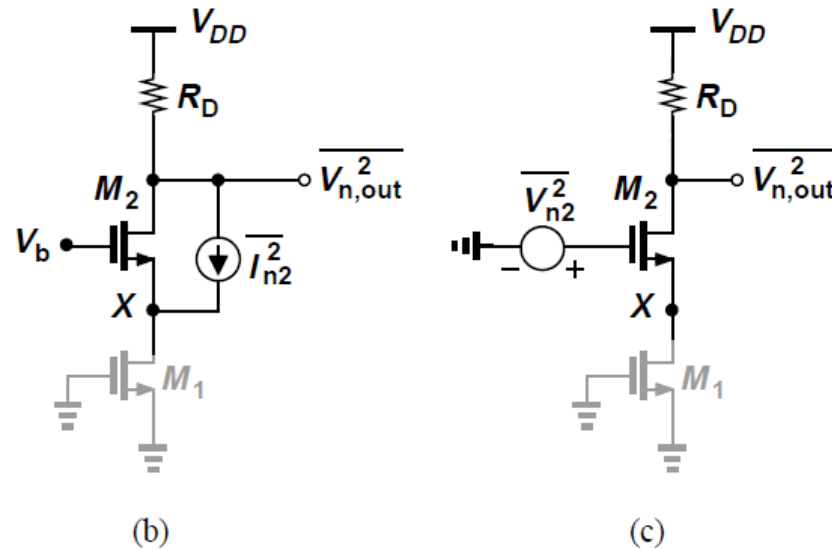


(a)

- Az (a) ábrán lévő kaskód fokozatnál M_1 és R_D árama leginkább R_D -n keresztül folyik alacsony frekvencián.
- M_1 és R_D által okozott zaj megegyezik a CS fokozatban levezetett értékkel

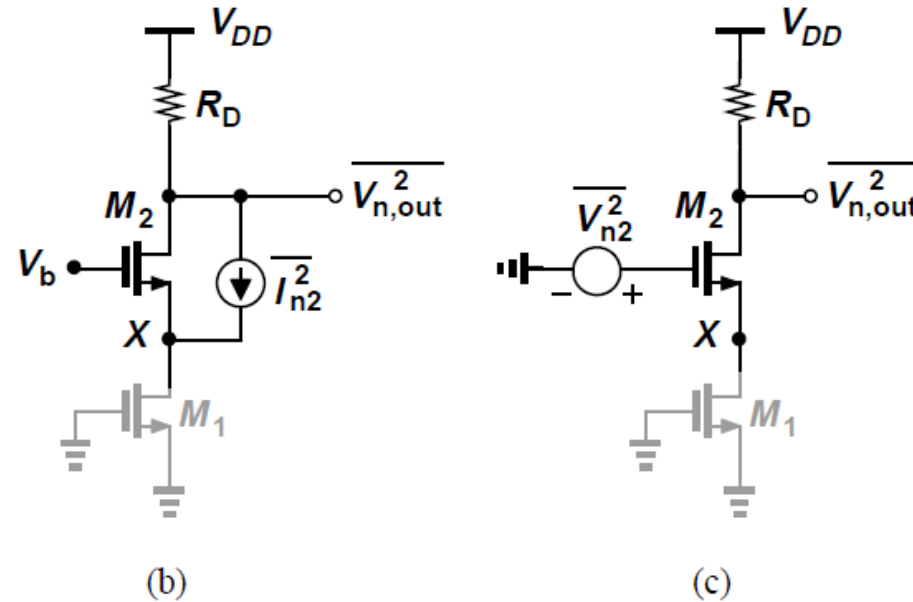
$$\overline{V_{n,in}^2}|_{M1,RD} = 4kT \left(\frac{\gamma}{g_{m1}} + \frac{1}{g_{m1}^2 R_D} \right)$$

Kaszód fokozat



- Ahogy a (b) ábra is mutatja M_2 hozzájárulása a kimeneti zajhoz alacsony frekvencián elhanyagolható.
- Ha M_1 csatornarövidülését elhanyagoljuk, akkor $I_{n2} + I_{D2} = 0$, ezért M_2 nincs hatással a kimenetre.
- Másik megközelítés: a (c) ábrán látható ekvivalens áramkörben a feszültségerősítés V_{n2} -ről a kimentre kicsi, ha az X ponton nagy az impedancia.

Kaszód fokozat

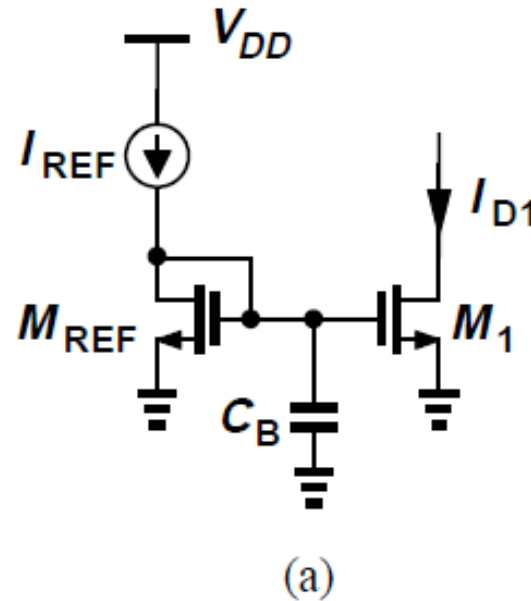


- Nagy frekvenciákon az X ponton látszódó teljes C_X kapacitás hatása miatt kisebb impedancia mérhető, ezért az erősítés megnő, tehát az M_2 által okozott kimeneti zaj nő.

$$\frac{V_{n,out}}{V_{n2}} \approx \frac{-R_D}{1/g_{m2} + 1/(C_X s)}$$

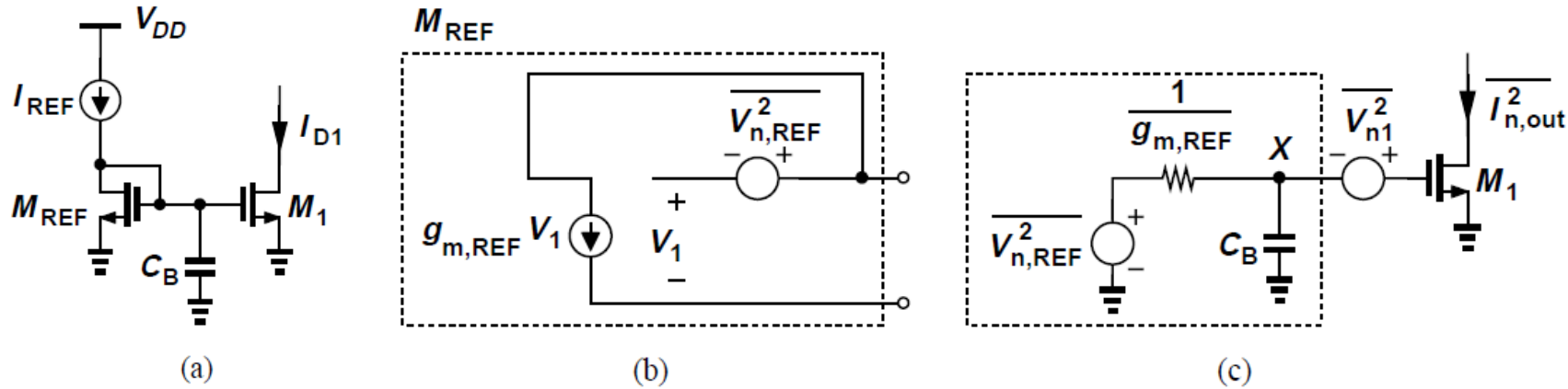
- Ez a kapacitás a “fő” bementről a kimenetre történő erősítést is csökkenti, mert söntöli az M_1 által generált áram jelet.

Zaj áramtűkrökben



- Az ábrán látható áramtűkör topológiánál: $(W/L)_1 = N(W/L)_{REF}$
- Az N tényező 5 és 10 között van, hogy minimalizáljuk a referenciaág fogyasztását.
- I_{D1} flicker zajának meghatározásához feltételezzük, hogy $\lambda = 0$ és I_{REF} zajtalan.

Zaj áramtükörökben



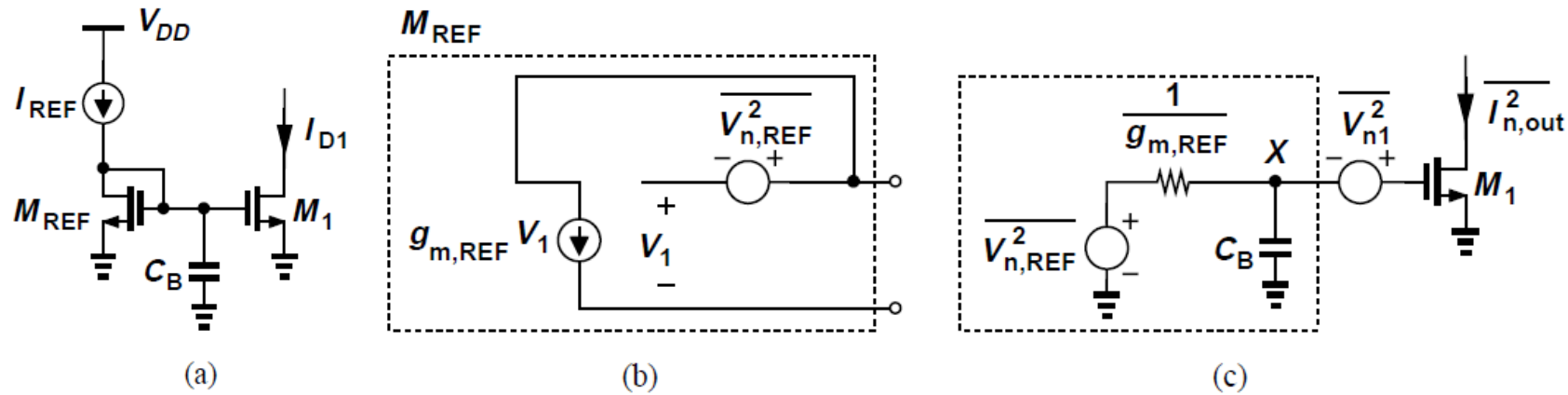
- M_{REF} és flicker zajának Thevenin helyettesítőképében a Thevenin feszültség $V_{n,REF}$ [(b) ábra] és a Thevenin ellenállás $1/g_{m,REF}$ [(c) ábra].
- Az X ponton lévő zajfeszültség és V_{n1} összeadódnak és meghajtják M_1 gate-jét, ezzel a kimeneti áram:

$$\overline{I_{n,out}^2} = \left(\frac{g_{m,REF}^2}{C_B^2 \omega^2 + g_{m,REF}^2} \overline{V_{n,REF}^2} + \overline{V_{n1}^2} \right) g_{m1}^2$$

- Mivel $(W/L)_1 = N(W/L)_{REF}$ és tipikusan $L_1 = L_{REF}$ megfigyelhetjük, hogy:

$$\overline{V_{n,REF}^2} = N \overline{V_{n1}^2}$$

Zaj áramtűkrökben



- Ezt követően:

$$\overline{I_{n,out}^2} = \left(\frac{N g_{m,REF}^2}{C_B^2 \omega^2 + g_{m,REF}^2} + 1 \right) g_{m1}^2 \overline{V_{n1}^2}.$$

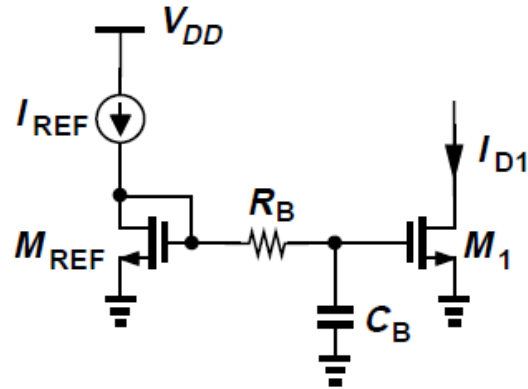
- Ahhoz, hogy a diódának kötött eszköz zaja kicsi legyen: $(N - 1) g_{m,REF}^2 \ll C_B^2 \omega^2$

- Ezért:

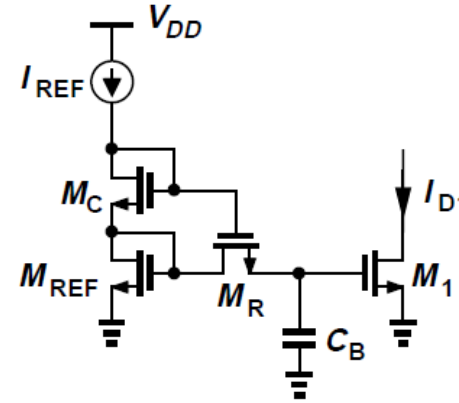
$$C_B^2 \gg \frac{(N - 1) g_{m,REF}^2}{\omega^2}$$

- Ez nagyon nagy C_B értékhez vezethet.

Zaj áramtűkrökben



(a)



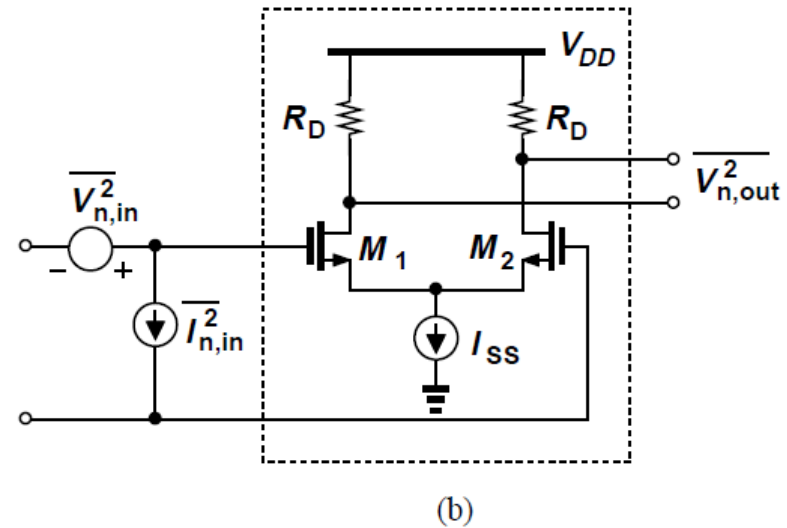
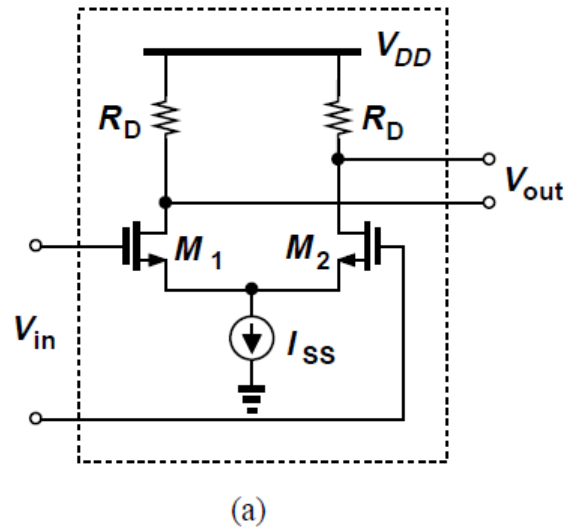
(b)

- Ahhoz, hogy M_{REF} zajának hozzájárulását csökkentsük ne nagy kapacitást használjunk, adjunk egy ellenállást a két gate közé kapcsolva. Ezzel:

$$\overline{I_{n,out}^2} = \left[\frac{g_{m,REF}^2}{(1 + g_{m,REF} R_B)^2 C_B^2 \omega^2 + g_{m,REF}^2} (\overline{V_{n,REF}^2} + \overline{V_{n,RB}^2}) + \overline{V_{n1}^2} \right] g_{m1}^2$$

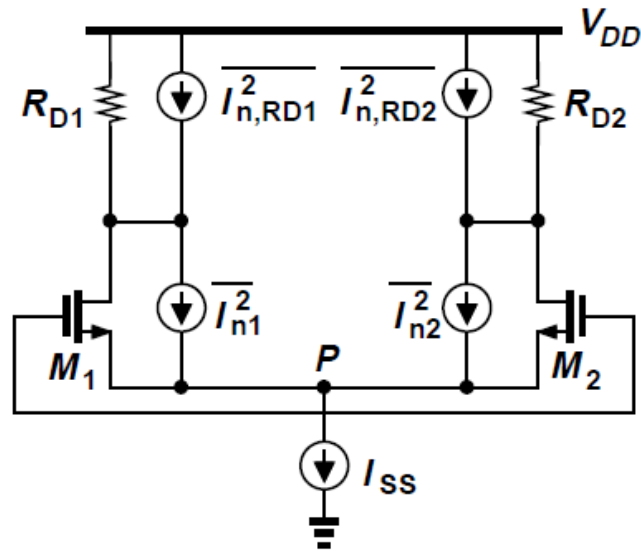
- R_B csökkenti a szűrő -3 dB-s törésponti frekvenciáját, de egyúttal zajt is visz a kapcsolásba.
- Egy MOS eszköz M_R kis vezérlőfeszültséggel nagy csatornaellenállású és kevesebb helyet foglal. [(b) ábra]

Zaj differenciál párokban

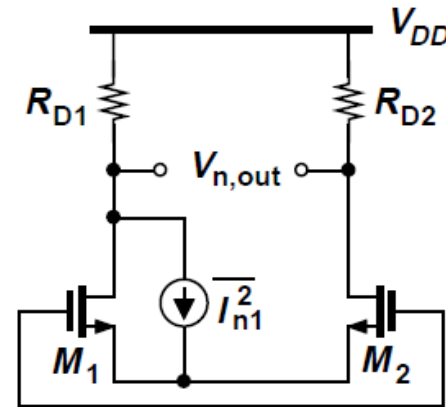


- Ahogy az (a) ábra mutatja egy differenciál pár tekinthető kétkapunak.
- A zajt a (b) ábra szerinti helyettesítőképpel modellezhetjük.
- Alacsony frekvenciás működés esetén $\overline{I_{n,in}^2}$ elhanyagolható.

Zaj differenciál párokban



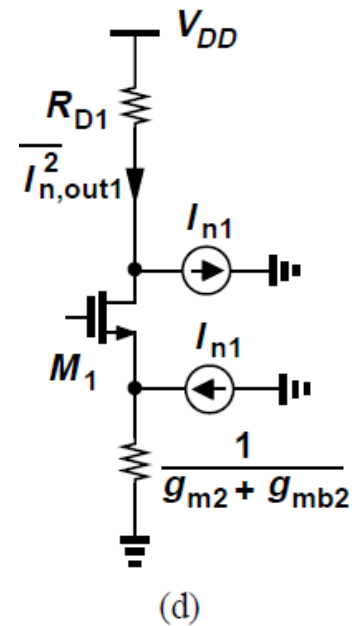
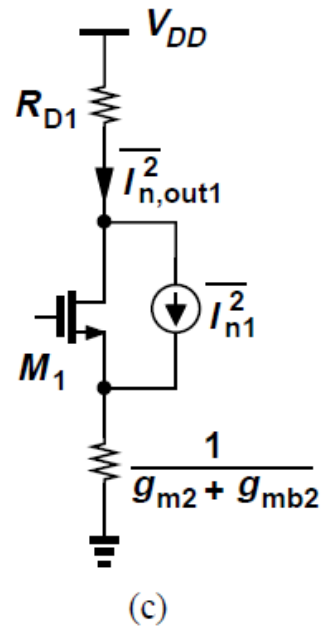
(a)



(b)

- $\overline{V_{n, in}^2}$ termikus komponensének kiszámításához, először meghatározzuk a kimeneti zajt úgy, hogy a bemeneteket összekötöttük. [(a) ábra]
- Mivel I_{n1} és I_{n2} korrelálatlan, a P pont nem tekinthető virtuális földpontnak, így a half circuit technika nem alkalmazható.
- Minden zajforrás hozzájárulását külön-külön kell kiszámolnunk. [(b) ábra]

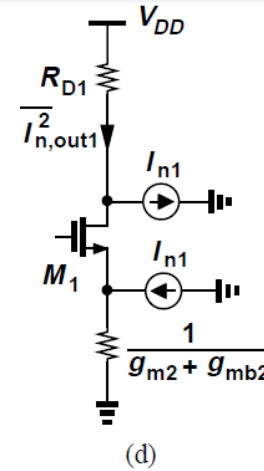
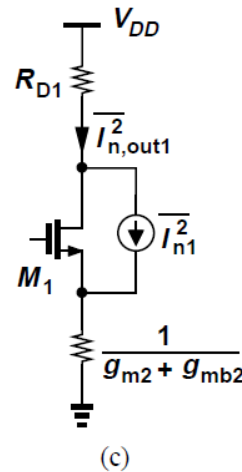
Zaj differenciál párokban



- A (c) ábra szerinti helyettesítőképpen I_{n1} hozzájárulását a csatornarövidülés elhanyagolásával számítjuk ki. Bebizonyítható, hogy I_{n1} fele R_{D1} -en, másik fele M_2 -n folyik keresztül. [(d) ábra].
- Az M_1 okozta differenciális kimeneti zaj:

$$V_{n,out}|_{M1} = \frac{I_{n1}}{2} R_{D1} + \frac{I_{n1}}{2} R_{D2}$$

Zaj differenciál párokban

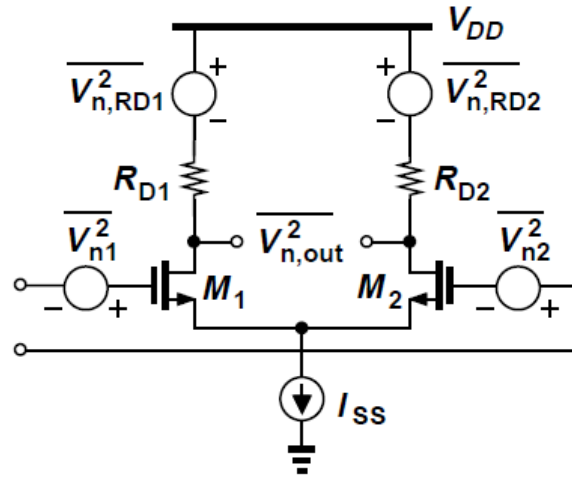


- Ha $R_{D1} = R_{D2} = R_D$: $\overline{V_{n,out}^2}|_{M1} = \overline{I_{n1}^2} R_D^2$ $\overline{V_{n,out}^2}|_{M2} = \overline{I_{n2}^2} R_D^2$
- Ezért: $\overline{V_{n,out}^2}|_{M1,M2} = (\overline{I_{n1}^2} + \overline{I_{n2}^2}) R_D^2$
- Ha R_{D1} és R_{D2} zaját is figyelembe vesszük:

$$\begin{aligned} \overline{V_{n,out}^2} &= (\overline{I_{n1}^2} + \overline{I_{n2}^2}) R_D^2 + 2(4kTR_D) \\ &= 8kT \left(\gamma g_m R_D^2 + R_D \right). \end{aligned}$$

- Elosztva a differenciális erősítés négyzetével: $g_m^2 R_D^2$ $\overline{V_{n,in}^2} = 8kT \left(\frac{\gamma}{g_m} + \frac{1}{g_m^2 R_D} \right)$

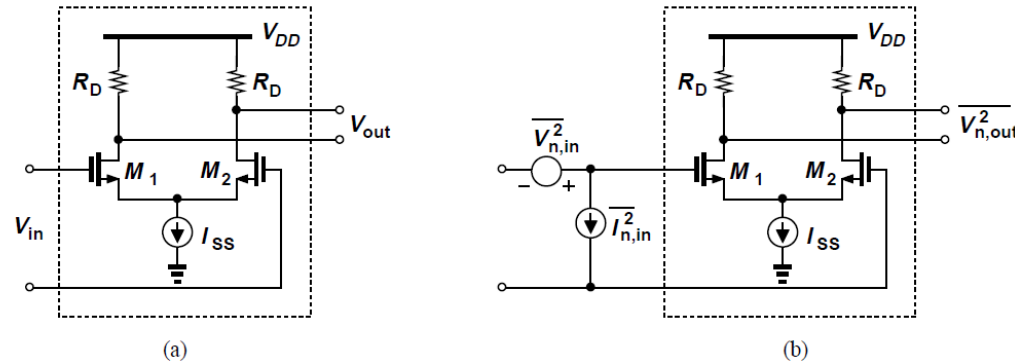
Zaj differenciál párokban



- A bemenetre redukált zaj az előző lemma segítségével is kiszámítható.
- M_1 és M_2 zaja modellezhető egy a gate-jükkel sorba kötött feszültségforrással.
- R_{D1} és R_{D2} zaját elosztva a $g_m^2 R_D^2$ erősítéssel az előző eredményt kapjuk.
- Ha az $1/f$ zajt is figyelembe vesszük:

$$\overline{V_{n, in, tot}^2} = 8kT \left(\frac{\gamma}{g_m} + \frac{1}{g_m^2 R_D} \right) + \frac{2K}{C_{ox} W L} \frac{1}{f}$$

Zaj differenciál párokban

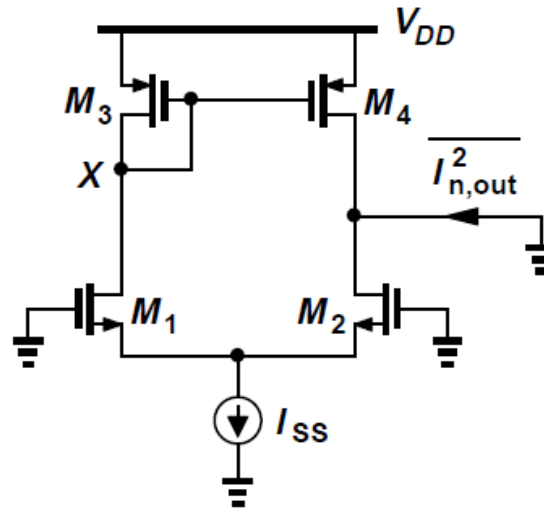


- Ha a differenciális bemenet nulla és az áramkör szimmetrikus, akkor I_{SS} zaja egyenlően oszlik el M_1 és M_2 között és csak közös modulusú zajt eredményez a kimeneten.
- Kis differenciális bemenet esetén:

$$\begin{aligned}\Delta I_{D1} - \Delta I_{D2} &= g_m \Delta V_{in} \\ &= \sqrt{2\mu_n C_{ox} \frac{W}{L} \left(\frac{I_{SS} + I_n}{2} \right)} \Delta V_{in}\end{aligned}$$

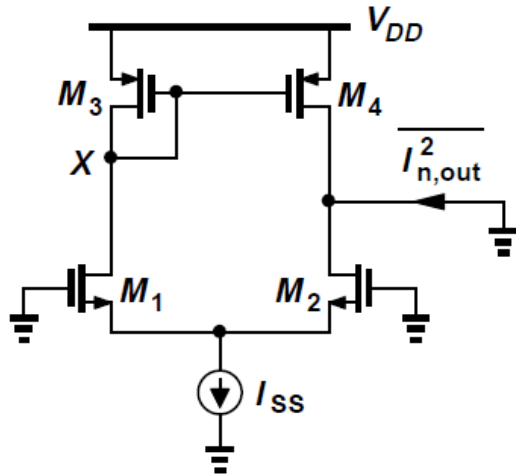
- I_n jelöli I_{SS} zaját és $I_n \ll I_{SS}$
- Ahogy az áramkör kikerül az egyensúlyi állapotból I_n egyre kevésbe egyenlően oszlik el, ezért differenciális kimeneti zajt generál.

Zaj az öt tranzisztoros OTA-ban



- A Norton zaj helyettesítőkép meghatározásához először ki kell számítanunk a kimeneti zaj áramot rövidzár terhelés esetén.
- Ezt megszorozva a kimeneti impedanciával és elosztva az erősítéssel megkapjuk a bemenetre redukált zajfeszültséget.
- A transzkonduktancia közelítőleg $g_{m1,2}$
- Az M_1 és M_2 okozta kimeneti zaj áramot úgy kapjuk, ha ezt a transzkonduktanciát megszorozzuk M_1 és M_2 gate-re redukált zajával:
$$g_{m1,2}^2 (4kT\gamma/g_{m1} + 4kT\gamma/g_{m2})$$

Zaj az öt tranzisztoros OTA-ban



- M_3 zaj árama elsősorban a diódának kötött eszközön folyik, aminek az impedanciája $1/g_{m3}$, így M_4 gate-jén kialakult zajspektrum $4kT\gamma/g_{m3}$.

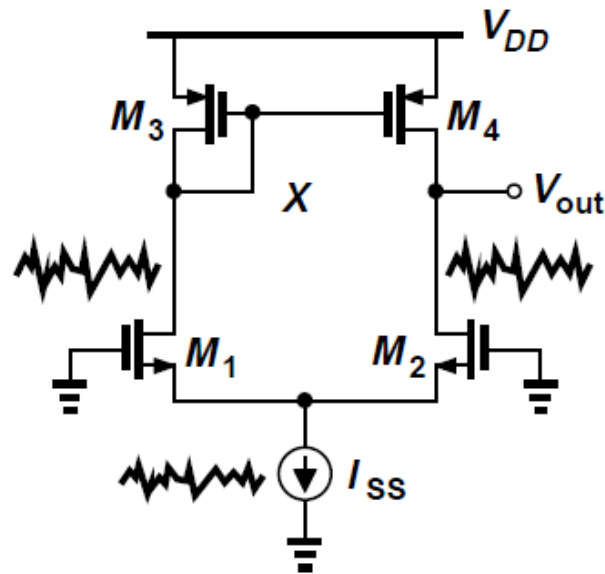
- Ezt a zajt megszorozzuk g_{m4}^2 -tel, hogy M_4 drain-jén lévő zaj áramot kifejezzük. M_4 zaj árama szintén keresztülfolyik a rövidzár kimeneten, ezért:

$$\overline{I_{n,out}^2} = 4kT\gamma(2g_{m1,2} + 2g_{m3,4})$$

- Megszorozva ezt a zajt $R_{out}^2 \approx (r_{O1,2} || r_{O3,4})^2$ -tel és elosztva $A_v^2 = G_m^2 R_{out}^2$ -tal a teljes bemenetre redukált zaj:

$$\overline{V_{n,in}^2} = 8kT\gamma \left(\frac{1}{g_{m1,2}} + \frac{g_{m3,4}}{g_{m1,2}^2} \right)$$

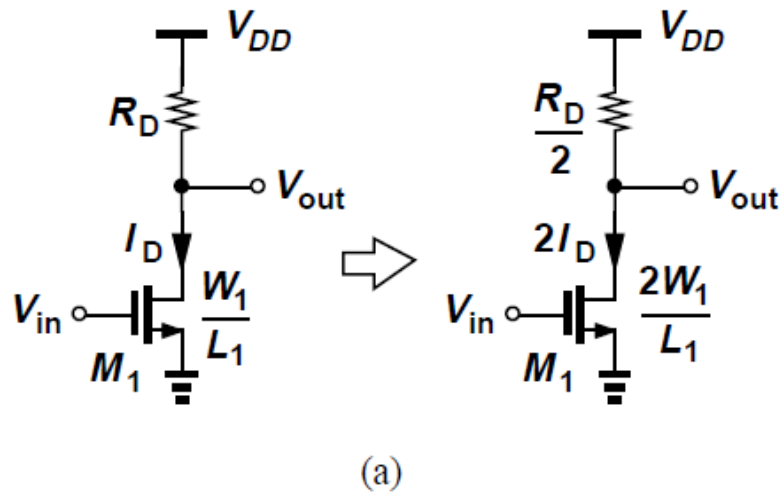
Zaj az öt tranzisztoros OTA-ban



- A V_{out} kimeneti feszültség megegyezik a V_X feszültséggel.
- Ha I_{SS} ingadozik, vele együtt V_X és V_{out} is.
- Mivel az I_n zaj áram egyenlően oszlik meg M_1 és M_2 között, a zajfeszültség az X ponton nem más, mint $\overline{I_n^2} / (4g_{m3}^2)$, ami megegyezik a kimeneten mért zaj feszültséggel.

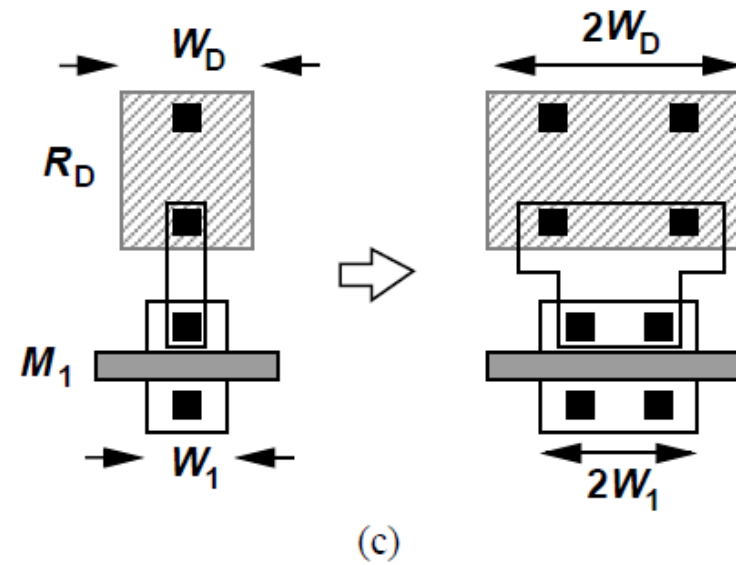
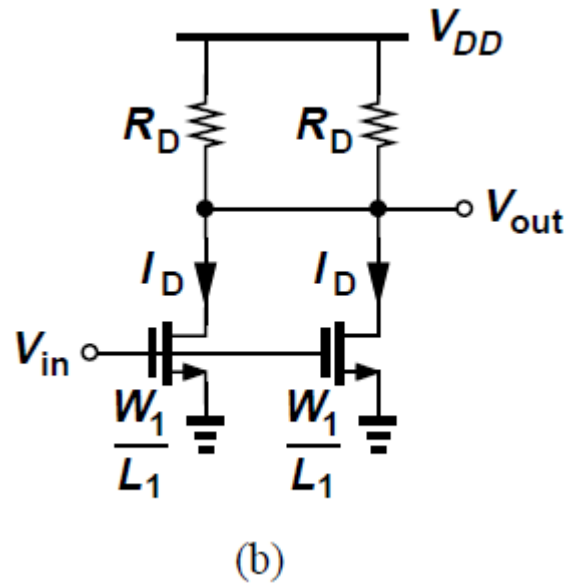
Zaj-teljesítmény trade-off

- A jel útban lévő tranzisztorok zajának hozzájárulása fordítottan arányos a transzkonduktanciájukkal.
 - Ez az áramkör zaja és teljesítménye közötti trade-off-ot eredményez.



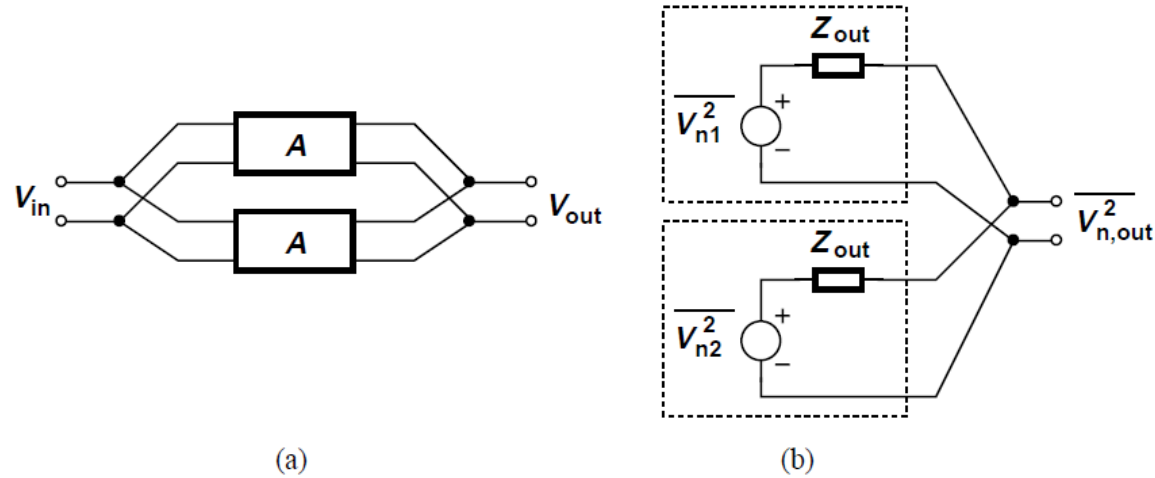
- Az egyszerű CS fokozatnál [(a) ábra] megdupláztuk a W/L arányt és az I_{D1} bias áramot, valamint R_D értékét a felére csökkentettük. A feszültségerősítés és a kimeneti swing ezzel változatlan maradt.
- A bemenetre redukált termikus és flicker zajteljesítmény a felére csökkent, cserébe megnőtt az áramkör fogyasztása.

Zaj-teljesítmény trade-off



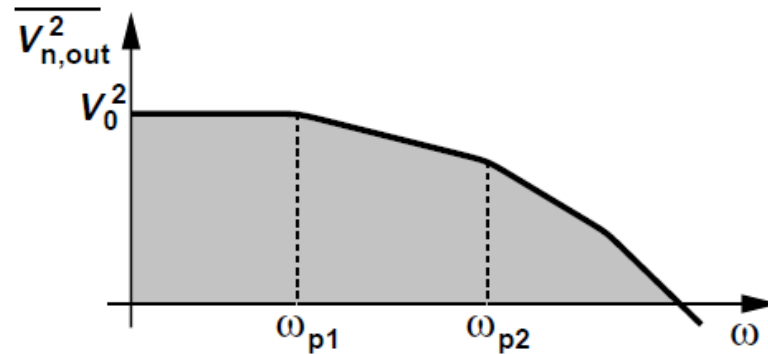
- Az előzőekben bemutatott módosítás tekinthető úgy, mintha két egyforma kapcsolást párhuzamosan kötöttünk volna [(b) ábra], ezt szoktuk „lineáris skálázásnak” nevezni.
- Vagyis azt mondhatjuk, hogy mind a tranzisztor, mind az ellenállás szélessége megduplázódott.

Zaj-teljesítmény trade-off

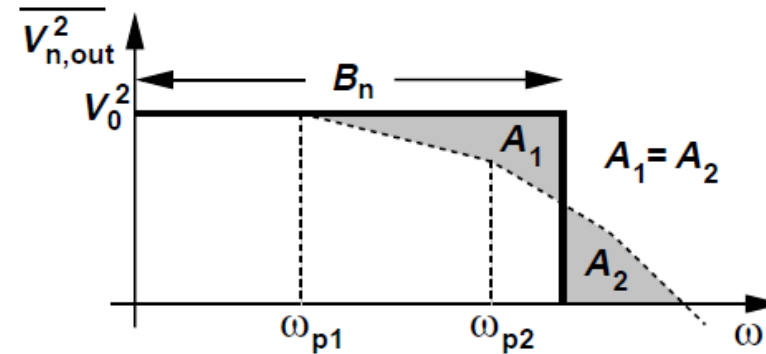


- Általánosan elmondható, hogy ha két egyforma kapcsolást párhuzamosan kötünk, akkor a kimeneti zajteljesítmény felére csökken. [(a) ábra]
- Ezt úgy bizonyíthatjuk, hogy a bemenetet nullára állítva a Thevenin helyettesítőképével helyettesítjük az áramkört. [(b) ábra]
- Mivel $V_{n1,out}$ és $V_{n2,out}$ korrelálatlan használhatjuk a szuperpozíció elvét, így:
$$\overline{V_{n,out}^2} = \frac{\overline{V_{n1,out}^2}}{4} + \frac{\overline{V_{n2,out}^2}}{4}$$
$$= \frac{\overline{V_{n1,out}^2}}{2}.$$

Zaj sáv szélesség



(a)



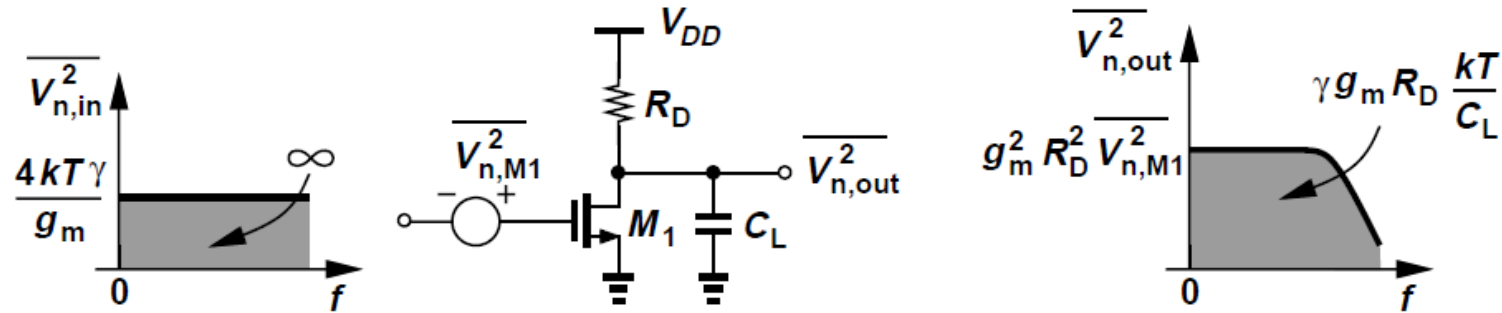
(b)

- Egy áramkörben a jelet terhelő teljes zajnak az áramkör sáv szélességében lévő összes frekvencián vannak komponensei.
- Egy több pólusú rendszernél, ha a zajspektrum az (a) ábra szerinti, akkor a teljes kimeneti zaj:

$$\overline{V_{n,out,tot}^2} = \int_0^\infty \overline{V_{n,out}^2} df.$$

- Ahogy a (b) ábra mutatja a teljes kimeneti zaj kifejezhető a $V_0^2 \cdot B_n$ formában is, ahol a B_n sáv szélességet zaj sáv szélességnek hívjuk és úgy választjuk, hogy igaz legyen, hogy: $V_0^2 \cdot B_n = \int_0^\infty \overline{V_{n,out}^2} df$

A bemeneti zaj integrálásának problémája



- A fenti CS fokozatban, $\lambda = 0$ és R_D zaját elhanyagoljuk, csak M_1 termikus zaját vesszük figyelembe.
- A kimeneti zaj spektrum az erősített és az aluláteresztő szűrőn keresztülment zaja M_1 -nek, ami könnyen integrálható.
- A bemenetre redukált zaj feszültség azonban egyszerűen $\overline{V_{n,M1}^2}$, ami végtelen teljesítményt tartalmaz és nem integrálható.
- A különböző áramkörök összehasonlíthatóságának érdekében eloszthatjuk az integrált kimeneti zajt az alacsony frekvenciás erősítéssel, például:

$$\overline{V_{n,in,tot}^2} = \gamma g_m R_D \frac{kT}{C_L} \cdot \frac{1}{g_m^2 R_D^2} = \frac{\gamma}{g_m R_D} \frac{kT}{C_L}$$